INSTITUTIONES
PHILOSOPHICÆ
AD STUDIA THEOLOGICA POTISSIMUM ACCOMMODATÆ,

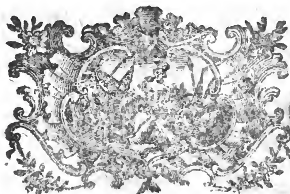
AUCTORE

FR.CO JACQUIER

EX MINIMORUM FAMILIA

Primariarum per Europam Academiarum Socio, in Lyceo Romano, & in Collegio Urbano de propaganda fide Professore.

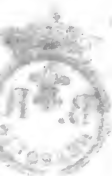
ARITHMETICA, GEOMETRIA, ET ALGEBRA.



VENETIIS, MDCCLXXXV.

Apud Simonem Occhi,

Superiorum Permissu, ac Privilegio



AUCTOR LECTORI.

Hysicam inter Geometricamque doctrinam tam arcta est necessitudo, ut apud omnes cultiores viros tanquam vanissimum merito habeatur Physices studium Geometriæ præsidio destitutum. Quæ cum ita sint, nemo mirari debet quod a studiosis adolescentibus, sacræ licet Theologiæ destinatis, Arithmeticæ & Geometriæ elementa requiram; si enim his careant doctrinæ Physicæ adjumentis, satius est eos huic præclarissimo studio valedicere omnino: *Melius est nihil scire, quam male scire;* tale enim cognitionis, potius dicam ignorantiæ, genus, mentis aciem hebetat rectumque judicium corrumpit, & omni studiorum generi nocet plurimum. At me fortasse reprehendent censores aliqui quod nova elementa ediderim, cum nihil fere in orbe litterario frequentius sit Elementorum libris. Neque talem me esse quis sibi falso persuadeat ut de aliis elementis minus laudabiliter sentiam, huncque meum libellum supra alios omnes extollam, quod tamen a plerisque Elementorum auctoribus nimis arroganter factum video. Et quidem variis Elementis ratione licet & methodo diversissimis suam justam laudem concedendam esse facile quisque fatebitur, si varias attenderit adolescentum conditiones atque voluntates. Alii sublimiorem Physicam Mathesimque universam addiscere, & funditus haurire sibi proponunt; alii autem aliis stu-

ſtudiis gravioribusque negotiis nati Inſtitutiones Geometricas ſtrictim leviterque tantum arripiunt, quantum ſcilicet expoliendo perficiendoque ingenio ſatis eſt. Alii ultra Geometriam, quam *practicam* vocant, nolunt progredi, illaque minus nobili geometriæ parte contenti ſunt, alii tandem alios fines aliaque conſilia in animo habent. Quid ergo mirum quod ego Arithmeticæ & Geometriæ Elementa ad meas phyſicas inſtitutiones accommodatiſſima proponam? At quæcumque ſit Elementorum ratio, demonſtrationis ſeveritas religioſe ſemper tenenda eſt, neque obſcura multarum propoſitionum farragine juvenum mens eſt obruenda, ſed ſplendidiori accuratioris Geometriæ lumine illuſtranda. Monendi ergo ſunt ſtudioſi adoleſcentes ut ab iis caute abſtineant Elementis, quæ nec ſatis accurata methodo conſcripta ſunt, nec firmiſſimo demonſtrationum robore munita. Perniciosiſſima quidem ſunt ſtudioſæ juventuti talia Elementa, quæ eos habent auctores, quorum doctrina tota in Elementis continetur. Verum ſi recto proportionum ordine nexuque neceſſario colligatæ fuerint demonſtrationes omnes, ex hoc ſtudio diligenter, & ut par eſt inſtituto, in quolibet ſcientiarum genere fructum maximum ſine ulla dubitatione polliceor. Nec quidquam exiſtimationis Geometrico ſtudio detrahi debet, ſi aliqui extiterint in rebus Geometricis etiam verſatiſſimi, in vulgari tamen agendi ratione & in rebus familiariſſimis omnino inepti. Id quidem, quod ſumma injuria objici ſolet, tribuendum eſt præcipiti quorun-

dam

dam Geometrarum judicio. Non desunt, fateor, celeberrimi etiam viri, qui in rebus Mathematicis toti occupati, necessaria rerum tractandarum vel gerendarum principia & elementa non satis tenent, atque hinc mirum non est quod aliquando errent graviter, Geometrarum non Geometræ vitio. Et re quidem ipsa, si fons erroris probe attendatur, vitium in principio, non vero in *consequentiis* latere deprehenditur; contra autem alii homines non pauci, veris utuntur principiis, errant autem in *consequentiis*. Itaque huc mihi maxime reducendum videtur Geometrici studii pretium; si nempe duos fingere liceat homines eadem ingenii vi, eodemque cognitionum gradu præditos, atque *cæteris*, ut vulgo dicunt, *paribus*, unus autem sit Geometriæ auxilio adjutus, alter autem destitutus, facile mihi persuadeo virum Geometram in quolibet scribendi genere, in tractanda etiam quæstione theologica multo excellentiorem futurum; neque enim quæ prima sunt, postrema dicet, & vicissim; nec quæ perspicua sunt & illustria, minus accurata methodo obscurabit, aut quæ abstrusa sunt & involuta densiori caligine non obvolvet. Verum ne Geometriæ studio nimis tribuere videar, & hanc, quam maxime amo disciplinam, magnificentius prædicare, de iis non loquor melioris ingenii viris in quibus excellens judicium meditatione & experientia subactum atque perfectum miramur, sive graviora tractanda sint negotia, sive studiis quibuscumque danda sit opera. Has justissimas Geometriæ laudes attigisse

satis

ſatis ſit ad excitandam adoleſcentum voluntatem. Faxit D. O. M. ut hoc meo qualicumque labore utantur, non in rebus phyſicis tantum, ſed etiam ut in ſtudiis gravioribus, quem quidem fructum maxime exopto, ratiocinandi vim accuratiori methodo augeant atque amplificent, hujus tamen ſanctiſſimi dogmatis probe memores: *Captivare intellectum in obſequium fidei.*

Caterum Scholia & appendices in his Elementis pratermitti poſſunt ab iis qui majori pollent intelligendi facilitate; minus enim neceſſaria ſunt hac additamenta.

IN-

INDEX

ELE-

ELEMENTA ARITHMETICÆ TUM VULGARIS, TUM SPECIOSÆ.

CAPUT I.

De præcipuis utriusque Arithmeticæ operationibus generatim consideratis.

I. ARithmetica generatim definitur *scientia computandi*. Computatio autem vel fit per vulgares numeros, ac proinde & determinatos 1, 2, 3 &c. vel per alphabeti litteras a, b, c &c. quæ numerum quemlibet, aut quantitatem quamlibet designant. Prima computandi ratio *Arithmetica* simpliciter dicitur; altera autem vocatur Arithmetica *speciosa*, vel *Algebra*; convenientius a Newtono Arithmetica *universalis* appellatur. Has quidem definitiones juxta vulgarem docendi consuetudinem præmittimus; monendum tamen est scientias quasdam vix clare definiri posse, nisi earumdem scientiarum diligens præcedat analysis atque accurata explicatio. Ita in præsenti casu, explicatis Arithmeticæ & Algebræ operationibus, recte jam dicere liceret: Hæc quam vobis explicavimus scientia, ea est,

quæ *Arithmetica* vel *Algebra* vocatur. Per *numerum* Arithmetici intelligunt *unitatum multitudinem*. At accuratius a Newtono definitur numerus *relatio*, seu, *ratio* quantitatis cujusvis ad aliam ejusdem generis quantitatem. Quæ quidem definitio ut in bono lumine collocetur, observandum est quantitatem quamlibet cum alia ejusdem generis quantitate comparatam, vel ea minorem esse, vel majorem, vel tandem ipsi equalem, hoc est, magnitudinem aliquam vel in alia contineri, vel hanc aliam certo modo continere; hic autem modus, quo magnitudo aliqua aliam continet, vel in ea continetur, *numerus* dicitur. E. G. numerus 3 exprimit rationem magnitudinis alicujus ad aliam minorem quæ pro unitate assumitur, & in majori ter continetur. Contra autem si quantitas major 3, pro unitate adhibeatur, erit quantitas 1 tertia pars quantitatis majoris, quæ tanquam unitas consideratur, sive 1 ter in quantitate majori continetur Inde autem intelligitur quid sit numerus *integer*, quid numerus *fractus*. Integer dicitur quem unitas metitur; fractus qui est pars unitatis; ita 1, 2, 3 &c. sunt numeri integri; sed dimidia, tertia, quarta, &c. pars unitatis sunt numeri fracti: ita autem exprimi solent numeri fracti $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$ &c.

Ratio quam modo definivimus, si nempe consideretur, quomodo quantitas una alteram contineat, dicitur *geometrica*. Vocatur autem *arithmetica*, si excessum tantummodo quantitatis unius supra aliam consideremus.

Dua-

Duarum rationum æqualitas *proportio* dicitur vel *geometrica* vel *arithmetica* pro diversa rationum qualitate. Quare ad habendam proportionem quatuor quantitates requiruntur, & prima ad secunda esse dicitur ut tertia ad quartam.

II. Numeri omnes in vulgari arithmetica decem notis sive characteribus designantur; sunt autem 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0, quorum ultimus *cyphra* sive *zero* appellatur. Harum notarum varia est significatio non solum ex diversa illarum figura, sed etiam ex diverso quem occupant loco. Quæ ad sinistram postremæ occurrunt, designant unitates, quæ proxime procedunt unitatum decadas; exinde centenarii sequuntur, millenarii & sic deinceps per decades & centenarios progrediendo. Huic autem usui potissimum cyphra destinatur; cum nempe ipsa nullum designet numerum; auget tamen reliquarum notarum significationem, longius illas ab extremo versus sinistram numero removens. Sic unitatis nota, quæ sola unicam designaret unitatem, beneficio unius vel duplicis cyphræ in secundum aut tertium locum rejecta, denas unitates aut centenas significabit. Breviores numeri facile leguntur; Ita 247 exprimunt ducentas quadraginta septem unitates; at in prolixioribus numeris aliquo opus est artificio, ita si legere oporteat numerum S. 3, 234 $\overset{B}{\text{l}}$. 057, 906 $\overset{A}{\text{l}}$ 234, 402. D: illum divide, quantum fieri potest, in classes, quarum singulæ tres notas contineant, incipiendo a dextra D, & progrediendo versus sinistram S; quamlibet

classem divide per virgulam singulis ternis notis interjectam. Deinde post duas primas classes, seu post sextam notam duc superius longiorem lineam verticalem A, quæ sex notas sejungat; & rursus progrediendo versus sinistram S, linea verticali B, dividantur aliæ sex notæ, & ita porro quantum opus est. Manifestum est ex dictis, in prima classe 402, contineri unitates duas, nihil decadum, & centenaria quatuor; quare classis ista legitur quadringenta duo: in 2 classe 234, continentur quatuor unitates, tres decades, & duo centenaria millium, hoc est, ducenta triginta quatuor millia. Quapropter in separatione sex primarum notarum ab A ad D, continentur tantum unitates usque ad centena millia inclusive & tota illa separatio legenda est in hunc modum A. 234402. D; ducenta triginta quatuor millia quadringenta duo. Tertia classis 906 pertinet ad milliones, & legenda est sic: nongenti sex milliones. Nam cum in secundo hujus classis loco reperiatur 0, indicium est nullam esse in hac classe decadem millionum. Quare classis B 057, continet septem & quinquaginta millia millionum; cum enim in tertio loco reperiatur 0, nihil est centenariorum millium millionum; & ideo classis ista quarta legitur 057, quinquaginta septem millia millionum, ac totus numerus 57, 906, 233, 402 legetur: quinquaginta septem millia nongenti sex milliones, ducenta triginta quatuor millia, quadrigenta duo.

III. Vulgares explicavimus arithmeticæ characteres, quorum auctores feruntur astrono-

nomi Arabes; aliquid jam dicendum est de notis quæ *Romana* appellantur. Notæ illæ, quarum in physicis institutionibus usus recurret, majusculis alphabeti litteris exprimuntur. His characteribus *Romanorum* nomen factum fuisse creditur, quod eos in monetis publicisque monumentis usurpaverint veteres Romani. Litteræ quæ numeros Romanos componunt sunt septem sequentes I, V, X, L, C, D, M. Harum notarum hæc est significatio, I unitas, V quinque, X decem, L quinquaginta, C centum, D quingenta, M mille. Si duo I scribantur in hunc modum II, æquivalent binario; si tria scribantur, significant ternarium. Numerus quaternarius ita exprimitur, IV, & numerus novenarius hoc modo IX, nempe unitas numeris V, X præfixa eos mulctat unitate. Verum ad exprimendos numeros vulgares 6, 7, 8 scribi solet VI, VII, VIII. Si numero L, vel C, præmittatur X, numeri illi decade minuuntur; ita XL significat 40, & XC 90; contra autem si numerum L sequatur X, in hunc modum LX, numerus præcedens augetur decade significans 60 &c. Aliquando numerus 400 expressus fuit litteris CD, sed raro. Præter litteram D, quæ exprimit 500, idem numerus significatur etiam hoc modo IↃ. Ita etiam loco M, aliquando scribitur CIↃ. Eodem modo exprimi potest 600 per IↃC; & 700 per IↃCC &c. Si litteræ C & Ↄ, ante & post addantur, numerus CIↃ augetur in ratione deculpa; ita CCIↃↃ significant 10000, CCCIↃↃↃ, 100000 &c. Hi erant communes arithmeticæ characteres apud veteres Romanos,

nos, qui etiam numerum millenarium designare solebant, adscripta numeris millenario minoribus lineola hoc modo, V̄ significat 5000, L̄X̄ designat 60000. Similiter M̄ æquivalet 1000000. M̄M̄ designat 2000000; a recentioribus nonnullis Scriptoribus variationes aliquæ fuerunt adhibitæ, ita litteris IIX designant 8, litteris IICIX exprimunt 89. Qua ratione horum numerorum ope computationes suas iniverint veteres Romani nos omnino latet. Aliquam procul dubio habuerunt arithmeticam, quam quidem invenire problema est haud difficile variisque solvi posset modis, quænam vero fuerit apud Romanos usitata, ignotum est omnino.

IV. Quoniam numeri nihil aliud sunt quam rationes quædam mente perceptæ & certis signis distinctæ, evidens est arithmeticam sive scientiam numerorum esse artem diversas illas rationes inter se combinandi, illasque certis characteribus distinguendi. Hinc nascuntur arithmeticæ operationes præcipuæ. Etenim diversæ numerorum combinationes huc revocari possunt, ut nempe mutuus eorum excessus, vel modus quo se invicem continent examinetur & assignetur. Ex his autem intelliguntur mox explicandæ quatuor vulgares arithmeticæ operationes: *Additio*, *subtractio*, *multiplicatio*, *divisio*.

V. Additio vocatur illa arithmeticæ operatio qua plures numeri simul colliguntur; subtractio autem dicitur operatio, qua numeri a se invicem subtrahuntur. Ita si addantur 1 & 3 ut efficiantur 5; vel minor nu-

numerus 2 a majori 3 subtrahatur, ut remaneat 1; in primo casu dicitur additio, in altero autem subtractio. Patet in additione & subtractione considerari mutuum numerorum excessum; etenim in additione excessus summæ ab alterutro numero innotescit, in subtractione autem mutua numerorum differentia investigatur. Multiplicatio appellatur illa arithmeticæ operatio, qua idem numerus sibimetipsi pluries additur; ita si 3 per 4 multiplicari debeat, idem est ac si 4 sibi ipsi ter addatur, vel 2 sibi ipsi quater adjungatur, prodibitque 12. Divisio est arithmeticæ operatio in qua numerus unus ab alio subtrahitur, quantum fieri potest; ita numerus 4 ex 12 ter subtrahi potest. Itaque patet in multiplicatione & divisione considerari modum, quo numeri sese mutuo continent. Ita in præcedenti multiplicatione innotescit numerum 12 ter continere numerum 4; per divisionem autem demonstratur numerum 4 ter contineri in 12. Ex his evidens est multiplicationem nihil aliud esse, quam additionem compositam; atque etiam divisio nihil aliud est quam composita subtractio. Quare ad duas dumtaxat revocari possunt quatuor vulgares arithmeticæ operationes. Hinc arithmeticæ operationes accurate omnino definivit Newtonus: *Compositionem & resolutionem arithmeticam*, quæ quidem definitio ex ipsa atithmeticarum operationum natura derivatur. Quamvis autem numeri sint rationes geometricæ, ex dictis tamen evidens est additionem & subtractionem pro-

prie revocari ad rationem arithmeticam, multiplicationem vero & divisionem ad rationem geometricam referri. Cæterum præter vulgares quatuor enumeratas operationes aliæ sunt plurimæ, sed hæ omnes ad primas referuntur, ut ex dicendis manifestum fiet. Hic autem regulæ arithmeticæ generatim consideraſſe satis sit; patet autem hanc quam tradidimus arithmeticæ notionem, arithmeticæ speciosæ communem esse. Itaque licet arithmeticæ nomen generatim usurpemus, illud tamen de arithmetica speciosa intelligi quoque volumus. Jam vero universam arithmeticæ utriusque doctrinam breviter & distincte explicemus, quantum postulant nostrarum Institutionum necessitas, atque injuncta brevitas.

CAPUT II.

De quatuor primis arithmeticæ operationibus in numeris integris.

I. PRima arithmeticæ operatio dicitur *additio*, quæ ex præcedentibus satis intelligitur. Totam hujus operationis praxim declarabimus atque demonstrabimus.

PRO-

PROBL. I.

Numeros integros addere, sive in unam summam colligere.

Exempl.
23561
393
8768
49321
82042

ADdendi proponantur numeri in hoc exemplo expressi. Quatuor numerorum columnas ita alias aliis adscribe serie descendente, ut unitates unitatibus subjiciantur, decades decadibus, & sic de reliquis. Tum infra omnes numeros ducta lineola & a postrema columna exorsus dic 1 & 8 efficiunt 9, 9 & 2 efficiunt 11, 11 & 1 efficiunt 12. Habes ergo in hac columna unam decadem unitatum ac præterea duas unitates. Quare scribe 2 in columna unitatum, & decadem rejice in sequentem decadum columnam dicens: 2 & 1 efficiunt 3, 3 & 6 efficiunt 9: 9 & 9 efficiunt 18, 18 & 6 efficiunt 24, hoc est, duas decadas decadum sive duo centenaria & 4 decades, scribe ergo quatuor in loco decadum, & duo centenaria in sequentem columnam rejice, eodemque pacto in hac & reliquis operare, & tandem invenies summam quæsitam 82042.

Demonstratio ex tota operationis serie facile patet. Etenim in unaquaque columna numeri ita colliguntur tanquam si essent unitates, ex eaque summa tot unitates in columnam proxime sequentem rejiciuntur quot decades collectæ sunt; quod quidem faciendum esse evidens est; cum nota quælibet ab unitatum columna ad reliquas pro-

grediendo, valorem habeat in columna sequente decuplo majorem quam in præcedente. Igitur in hac operatione adduntur singulæ unitates, decades, singula centenaria. Quare patet hujus operationis ratio, quæ quidem evidens est; cum totum æquale sit omnibus partibus simul sumptis, ex notissimo principio.

P R O B L. II.

Numeros integros subtrahere.

II. SEcunda arithmeticæ operatio dicitur *subtractio*, cujus totum hoc est artificium. Ut numerum datum a dato numero subtrahas, numerum subtrahendum alteri a quo subtrahi debet ita subjicies, ut unitates unitatibus respondeant, decades decadibus, & sic de reliquis. Tum ab unitatibus exorsus quamlibet inferiorem notam a superiori subtrahe, & residuum scribe infra lineolam, habebis numerum qui sit datorum numerorum differentia. Si vero occurrat inferiorem notam superiori majorem esse, hanc augebis decem unitatibus, easque mutuas accipies a proxime sequenti nota, quam proinde deinceps habebis tanquam unitate mulctatam. Subtrahendus proponatur numerus 4245 a numero 23897. Auferendo 5 ex 7 relinquitur numerus 2, auferendo 4 ex 9 relinquitur 5, 2 ex 8 remanet 6. At cum numerus 4 ex 3 subduci nequeat, adjice huic denas unitates & auferendo 4 ex 13, residuum habebis 9. Tum vero notam

Exempl.

23897
4245
19652

tam superiorem proxime sequentem unitate mulctabis; hanc enim ab ea mutuam accepisti ut denis unitatibus praecedentem augeres; habebis ergo residuum 1, ideoque residuum totum 19652.

Demonstratio satis per se constat, cum unitates ab unitatibus auferantur, decades a decadibus &c. Nam quod in hoc exemplo numerus 3 decem augeatur unitatibus & numerus sequens 3 unitate mulctetur, ratio patet. Haec nempe unitas in numero 3 decadi unitatum aequalis est, earum scilicet quibus constat idem numerus 3; quare etiam si unitatem dumtaxat ille amittat, huic tamen decem accedunt. Simili modo si plures sequerentur cyphrae, ex quibus proinde nulla fieri potest subtractio, ex numero proxime antecedenti mutua accipienda est unitas, quae in cyphram sequentem translata decem unitatibus aequivalet. Rursus ex illa decade unitas in secundam cyphram transfertur atque ita deinceps. Quare patet cyphram ultimam decem unitatibus aequalem esse, caeteras vero antecedentes aequari novenario. Itaque evidens est hujus operationis ratio.

Ex additionis & subtractionis natura manifestum est duas illas operationes sibi mutuam probationem conferre & sese invicem confirmare. Etenim cum residuum in subtractione sit ipsa numerorum differentia, patet minorem numerum residuo sive differentiae additum majori numero aequalem esse. Item cum additio sit plurium numerorum aggregatum, si ex aggregato alteruter numerus auferatur, numerum alterum rema-

nere necessum est. Si igitur explorare velis utrum additio rite peracta sit, subtractione utendum est; contra autem ad explorandam subtractionem additio adhibenda.

PROBL. III.

Numeros integros multiplicare.

III. Tertia arithmeticæ operatio vocatur *multiplicatio*, in qua, ut patet ex capite præcedenti, toties sumitur numerus multiplicandus, quoties unitas continetur in numero, per quem debet multiplicari. Singulæ notæ in singulas facile ducuntur, si numeri breviores sint. Sic nemo non videt 3 in 4 ductum, sive 4 ter sumptum 12 efficere. At si numeros pluribus notis constantes multiplicare oporteat, horum alterutrum infra alterum scribe ita, ut unitates unitatibus subjiciantur. Deinde notas omnes superioris numeri per singulas inferioris multiplica, initio a postremis facto. Decades quæ inter multiplicandum colliguntur sepone, adjiciendas producto ex eadem numeri inferioris nota in proxime sequentem superioris. Facta quæ emergunt ex singulis notis inferioris in omnes superioris, infra lineolam seorsim notentur, ita ut uniuscujusque unitates subjiciantur numero per quem multiplicatio peragitur. Si horum omnium summa colligatur, ea erit productum quæsitum.

Mul-

Multiplicandus proponatur numerus 235 per 43. Scribe 43 sub 235; tum ducta lineola dic 3 in 5 efficiunt 15, scribe 5 sub numero multiplicante 3, & unam decadem sepone adjiciendam facto sequenti ex 3 in 3, quod est 9, cui si addas 1, habebis unam decadem, & nullas præterea unitates; scribe igitur 0, & facto ex 3 in 2 adjiciens 1, scribe 7; rursus dic 4 in 5 efficiunt 20, scribe 0, ita ut multiplicatori 4 subjaceat; & facto sequenti 4 in 3, quod est 12, adjiciens 2, habebis 14, scribe igitur 4, & seponens 1, dic 2 in 4 efficiunt 8, & adjecto 1 scribe 9. Demum ducta linea, collige in unam summam hos numeros ita dispositos, eritque 10105 productum quæsitum.

Exempl.

```
  235
   43
 ----
  705
 940
 ----
10105
```

Demonstratio evidens est ex ipsa notarum arithmeticarum natura; si nempe in memoriam revocetur numerorum characteres decuplo plus valere in locis anterioribus quam in posterioribus: illico enim manifestum fiet toties sumi in producto numerum multiplicandum, quoties unitas continetur in numero per quem fit multiplicatio.

PROBL. IV.

Numeros integros dividere.

IV. Quarta arithmeticæ operatio vocatur *Divisio*. Cum numerus datus per alium datum dividendus proponitur, eo reducitur quæstio, ut inveniatur quoties in numero dividendo contineatur divisor, totiesque auferatur, atque to-

totidem unitates scribantur in numero qui idcirco *quotus* dicitur. Hæc ergo genuina est divisionis notio, nempe dividendum est ad divisorem, ut quotus est ad unitatem; vel dividendus est ad quotum, ut divisor est ad unitatem.

Proponatur dividendus numerus 10105 per 43.

Numero dividendo divisorem præfige lineola interjecta, tum operationem instituens in primis notis dividendi, quæ exhibeant quantitatem divisori æqualem vel proxime majorem, dic quoties 43 continentur in 101? quotus erit 2. Scribe ergo 2, lineola pariter interjecta ex altera parte dividendi, & factum ex 2 in 43 sive 86 aufer ex 101, & residuo 15 notam appone quæ in dividendo proxime sequitur quantitatem jam divisam 101. Dic iterum, quoties 43 continentur in 150? quotus est 3, quem scribe ut ante, & factum ex 3 in 43 seu 129 aufer ex 150. Residuo 21 adnecte sequentem notam dividendi 5, & dic iterum, quoties 43 continentur in 21? quotus erit 5, quem scribe cum aliis quotis, & aufer ex 215 factum ex 5 in 43, sive 215; cum nihil ex ea divisione superfit, patet numerum 235 illum accurate esse qui oritur ex divisione 10105 per 43.

Exempl.

```
43 | 10105 | 235
      86
      150
      129
       215
       215
       000
```

Tota operationis ratio facile patet, si animadvertamus in hujusmodi operatione, rem perinde se habere, ac si quæreretur,

quo-

quota pars quantitatis alicujus singulis hominibus obveniret, si eam ex æquo tot hominibus distribui oporteret, quot unitates continet diviso. Nam in tota operationis serie inquirimus, quot unitates, decades &c. singulis dari possint, iisque datis quæ dari possunt, quot adhuc distribuendæ supersint. Facile autem intelligitur, post quamlibet subtractionem peractam, id quod relinquitur, antequam ulteriorem dividendi notam adjicias, divisore minorem esse oportere; nam si residuum æquale foret, vel majus, divisor in quantitate jam divisa pluries contineretur, quam indicet numerus in quotum relatus. Omnis difficultas in eo sita est, quod in numeris majoribus statim non pateat, quoties divisor in dividendi notis contineatur, & tentamine utendum est, divisor nempe per numeros ab 1 ad 9 multiplicandus est, atque numeri ex hac multiplicatione producti debent comparari cum dividendi notis, & explorandum est quinam ex illis numeris sit proxime minor; pones in quoto numerum, in quem ductus divisor hunc efficit numerum, ipsum vero numerum ex dividendi notis subduces. Cæterum qui in arithmetica satis fuerit exercitatus, facile conjiciet ex primis utriusque numeri notis, dividendi scilicet & divisoris, ipsum numerum pro quoto eligendum.

Probe autem observari debet in quoto notarum valor, ut in aliis Arithmeticæ operationibus jam antea monuimus; at in præsenti operatione, quæ est omnium difficillima rem brevi exemplo illustrabimus. Dividendus proponatur numerus 416 per 2; statim

tim patet, in quoto contineri centenarios, decadas, & unitates. Dividatur jam 4 per 2, quotus erit 2, qui per 2 multiplicatus producit 4, quo subtracto ex 4 fit 0. Patet ergo, divisum fuisse 400 per 2. Progredior deinde ad notam sequentem 1, hoc est dividi debet 10 per 2. Statim autem video 2 in 10 decies non contineri; quare scribitur 0 in quoto, tum ut indicetur, quotum nullam decadem continere, tum ut primæ quoti notæ 2 suus servetur centenarii valor. Tandem progrediendum ad 6, qui numero præcedenti 1 apponitur, divisoque 16 per 2, habetur quotus 8, ideoque quotus totus est 208. Hinc generatim intelligitur, qua de causa in quoto scribatur cyphra, imo & plures cyphras aliquando scribi oporteat. Hac divisione peracta, nulla relinquitur in dividendo nota, si autem aliquid residui ex postrema subtractione supersit, quoto adjicienda est fractio. Ita si in exemplo præcedenti haberetur numerus 417 per 2 dividendus, ita ut numerum 417 ex æquo hominibus 2 partiri debeas, singuli acciperent nummos 208, & dimidiam partem nummi, quæ ita scribitur $\frac{1}{2}$.

Ex hactenus explicatis generatim etiam patet, satis esse primam dividendi notam per primam divisoris notam dividi, si in divisore & dividendo idem sit notarum numerus. Verum si dividendus plures contineat notas, persæpe necesse est duas primas dividendi notas primæ divisoris notæ subjici; idque fieri debere evidens est, quoties datus no-

notarum numerus in divisore majorem habet valorem, quam habeat æqualis notarum numerus in dividendo: verum si duæ adhibeantur dividendi notæ, per primam divisoris notam divisio semper fieri potest. Quare generatim ostenditur, sumptis in dividendo tot notis quot sunt in divisore, notarum numerum in quoto æqualem esse residuo notarum numero in dividendo. Si vero, quod sæpe fieri necessium est, notarum numerus in divisore unitate minor sit quam in dividendo, unitate quoque minuatur notarum numerus in quoto. Hinc etiam patet nullum in quoto numerum novenario majorem adhiberi posse; alioqui enim notarum numerus in quoto major foret quam oportet; ut jam demonstratum est.

Divisionis rite peractæ argumentum habebis, si divisorem in quotum ducas, redeatque divisus numerus, nam si non redeat, manifestum est, alicubi errorem esse admissum; quod quidem patet ex ipsa divisionis natura, cum dividendus toties contineat divisorem, quoties unitas continetur in quoto: quare cum quotus exprimat quoties divisor contineatur in dividendo; si divisor per quotum multiplicetur, dividendum ipsum restitui necesse est. Cæterum patet, si divisorem accuratum habere non licuit, facto ex divisore in quotum addendum esse residuum ex ultima divisionis subtractione, ut redeat divisa quantitas. Contraria ratione evidens est multiplicationis rite peractæ haberi argumentum, si productum dividatur per multiplicandum aut per numerum multiplicatorem; in primo casu quotus sit multipli-

ca-

cator; in casu autem altero quotus est multiplicandus. Cum enim divisio sit multiplicationi contraria, per divisionem resolvitur quod in multiplicatione componitur, & contra. Cæterum in multiplicatione & divisione compendia plurima usus docebit; hic monere satis erit, multiplicationis per plures cyphras faciendæ compendium haberi, si in producto scribantur tot cyhræ quot occurrunt in multiplicando & multiplicatore simul; multiplicatio autem aliarum notarum fiat secundum regulas prædictas. Item in divisione, si divisor & dividendus cyphras contineant, in dividendo delendæ sunt tot cyphræ, quot occurrunt in divisore, quæ etiam in ipso divisore deleri debent, & reliqua operatio peragenda, ut antea. Notandum autem est compendium illud valere duntaxat, si cyphræ fuerint ultimæ tum divisoris tum dividendi notę; quod quidem manifestum est ex cyphrarum natura.

Scholium. In præsenti capite sermonem habuimus duntaxat de numeris homogeneis, sive ejusdem speciei; at pari facilitate in numeris heterogeneis, seu diversæ speciei absolvuntur operationes arithmeticæ. Antequam vero operationes illas explicemus, definiendum est quid per numerum *concretum*, quid per *abstractum* intelligant Arithmetici. Numerus concretus dicitur, quo res aliqua determinata designatur, ita si dicas tres homines, tres horas, tres pedes &c. At si numerus 3 generatim enuntiaveris, nec rem aliquam designaveris, numerus vocatur abstractus. Jam in numeris diversæ speciei additio, & subtractio facile intelli-

gun-

guntur. Probe tenenda est diversa numerorum species; ita si addi debeant lineæ, pollices, pedes, hexapedæ; sciendum est lineas 12 pollicem unum æquare; pollices 12 pedem unum, & hexapedam ex pedibus 6 constare. Ubi autem in linearum additione summa efficitur quæ 12 excedit; tot unitates inter pollices referri debent, quot sunt numeri duodenarii; quod vero reliquum est, seu quod duodenario minus est, in linearum columna scribi debet: & ita deinceps de alia qualibet numerorum specie. Similiter in subtractione tota patet operationis ratio; si quantitas subtrahenda, E. G. linearum numerus, justo major sit; jam ex quantitate præcedenti, pollicum scilicet, mutuo accipienda est unitas, quæ duodenario numero æquivalet, atque ita reliqua operatio peragenda. Illud unicum est discrimen inter operationes arithmeticas in numeris abstractis atque heterogeneis peragendas, quod scilicet in numerorum abstractorum additione vel subtractione unitas mutuo accepta decadi æquivaleat; at in numeris heterogeneis unitas quæ mutuo accipitur, eum retinet valorem, qui speciei suæ respondeat. Hæc de additione, & subtractione.

Quod multiplicationem spectat, improprie omnino a quibusdam arithmeticis proponi videntur concretorum numerorum multiplicationes. Ita ineptum est, quod faciunt aliqui, quærere productum ex nummis 3, juliis 3, assibus 3, in nummos 3, julios 3, asses 3. Etenim in eo sita est multiplicatio ut data quædam quantitas datis vicibus sumatur, ac proinde multiplicator debet

esse

esse numerus abstractus. Qua ratione autem quantitates diversæ speciei per numerum abstractum multiplicentur facile patet. Si, E. G. productum ex lineis in numerum abstractum majus sit numero duodenario, jam inter pollices rejici debent tot unitates, quot sunt numeri duodenarii; quod autem reliquum est inter lineas scribendum. Porro quamvis in multiplicatione numerus abstractus esse debeat multiplicator, res tamen aliter se habet in divisione; nam dividendus semper censetur numerus concretus, divisor autem vel concretus vel abstractus esse potest. Ita dividi possunt nummi 6 per nummos 2, hoc est, investigari potest quoties 2 contineatur in 6, quotus 3 erit numerus abstractus. Potest etiam dividi numerus concretus per numerum abstractum; ita nummos 6 dividere possumus per 3, hoc est, investigare possumus tertiam partem nummorum 6, quotus erit numerus concretus, nempe nummi 2. Jam ut perspicua habeatur divisionis notio, ad ipsam definitionem redeamus. In divisione scilicet dividendus est ad divisorem, ut quotus est ad unitatem, vel dividendus est ad quotum, ut divisor ad unitatem. Probe autem observari debent illæ duæ proportiones, licet una eademque videantur. Dividens tanquam numerus concretus semper habetur, concretus autem vel abstractus esse potest numerus divisor. In 1 casu, quotus erit numerus abstractus, & locum habet prima proportio; in casu altero, ubi nempe divisor est numerus abstractus, quotus est numerus concretus & locum habet proportio altera; quæ quidem omnia e-

xem-

xemplo facile licebit intelligere. Si nummi 6, *numerus concretus*, dividantur per nummos 2, *numerum* itidem *concretum*, quotus erit numerus abstractus 3, hic enim non indicabit numerum nummorum, sed exprimet quoties divisor continetur in dividendo; erunt nempe 6 nummi ad 2 nummos, ut numerus abstractus 2 est ad unitatem abstractam 1. Dici autem non posset, 6 nummi (*numerus* scilicet *dividendus* & *concretus*) sunt ad quotum 3 (numerum abstractum), ut nummi 2 (*numerus divisor* & *concretus*) ad 1 (numerum abstractum). Talis proportio nullam in mente relinqueret distinctam notionem; cum enim numerus concretus & numerus abstractus diversi sint generis, nulla inter eos comparatio & ratio proprie dicta institui potest.

Si divisor sit numerus abstractus, ut in casu secundo, quotus est numerus concretus, & secunda valet proportio. Ita si dividantur 6 nummi per numerum abstractum 3, quotus erit nummi 2, (numerus scilicet concretus), habebiturque hæc proportio: numerus concretus nempe 6 nummi erit ad quotum nummos 2, ut divisor 3 ad 1. Id vero notandum est in utraque proportione unitatem esse semper numerum abstractum. Quare divisio sub duplici ratione considerari potest; vel enim quæritur quoties quantitas una in altera ejusdem generis quantitate continetur, & hic est primus casus; vel quæritur quantitas quæ certis vicibus in alia ejusdem generis quantitate contineatur, & hic est casus secundus. Facile autem patet ex demonstratis quomodo numeri concreti

creti per abstractos dividantur, aut etiam concreti per concretos, etiamsi fuerint diversæ speciei. Etenim si concreti per abstractos dividantur, initio sumpto ab iis qui majorem habent valorem, divisio ex regulis præscriptis instituatur; si autem supersit aliquid, ad minorem speciem reducatur. E. G. Si residui fuerint pedes, reducantur in pollices, atque iterum divisio de more fiat. Si concretos numeros diversæ speciei per concretos itidem diversæ speciei dividi oporteat, jam numeri tum dividendi tum divisoris ad minimam speciem deprimantur; quod per multiplicationem fieri manifestum est, atque divisio fiat eodem modo ac in numeris abstractis. Cæterum in multiplicatione & divisione quantitatum diversæ speciei, varia adhiberi possunt operandi compendia, quæ sine fractionum doctrina intelligi non possunt. Divisionis notionem ex genuinis principiis jam hausimus; in operationibus arithmeticis abstrahi solet a concretis abstractisque numeris, an concreti sint vel abstracti, ad majorem operationum facilitatem; verum ad formandam earumdem operationum ideam distinctam, necesse est ut numeris sua deinde restituatur conveniens notio.

C A-

CAPUT III.

De quatuor praecedentibus operationibus in Arithmetica speciosa absolvendis.

PROBL. I.

Quantitates litterales addere.

Quantitatibus litteralibus præfiguntur signa, quorum significationem præmitti omnino necessum est. Signum additionis est $+$; signum autem subtractionis est $-$; æqualitas duabus lineolis exprimi solet hoc modo $=$. Ita $a = a$, $a - a = o$. Quantitas addenda dici solet quantitas *positiva*; quantitas autem subtrahenda vocatur *negativa*. Si quantitati litterali præfigatur numerus aliquis, hic *coefficiens* vocatur; ita in quantitate litterali 2a numerus 2 coefficiens appellatur. Si autem quantitas litteralis nullum numerum præfixum habeat, jam unitas tanquam illius coefficiens censeri debet: ita $a = 1a$, ut patet. Quantitates litterales dicuntur *similes*, si easdem contineant litteras, & eumdem earumdem litterarum numerum, etiamsi diversis coefficientibus notentur; ita $+ 2a$, & $- 5a$ sunt quantitates similes: at *dissimiles* sunt quantitates a & b, atque etiam quantitates a & aa. Quantitas aliqua *ex pluribus terminis composita* dicitur, quæ plures habet litteras signo $+$, vel $-$ connexas. Ita $a + b$ constat ex duobus terminis & *binomium* dicitur;

tur; a + b + c ex tribus terminis componitur, & *trinomium* vocatur. Quantitas ex unico termino composita dicitur *quantitas simplex*, atque etiam *monomium*; ita a, ab, abc sunt quantitates simplices. His præmissis definitionibus, quantitatum litteralium additio jam explicanda est. Si quantitates simplices fuerint, tota operationis ratio statim patet. Ita si a & a addi debeant, habebitur 2a; si addere oporteat a & 2a, summa erit 3a, & ita deinceps; satis nempe est in hoc casu addi coefficientes, & coefficientium summam quantitatibus litteralibus præfigi, eodem servato signo + vel −, si quantitates eodem signo afficiantur. At si diversa fuerint signa, jam coefficiens minor a majori subtrahi debet, & differentia cum majoris coefficientis signo scribenda.

Id quidem evidens est ex negativarum, & positivarum quantitatum natura. Etenim quantitates positivæ quantitatibus negativis sunt directe contrariæ. Quare si quantitates addendæ similes sint, signisque contrariis affectæ, vel se omnino destruunt, vel aliqua ex parte tantum; nempe si quantitas una sit altera major, destruitur in majori quantitate pars minori æqualis, & residuum est quantitatis utriusque differentia, quæ quidem differentia signo majori quantitati præfixo affici debet. Ita evidens est, quantitates + 5df & − 3df reduci ad + 2df; nam 5df est quantitas df quinquies sumpta, & − 3df est quantitas df ter subtracta; sed eadem quantitas quinquies sumpta & ter subtracta reducitur ad quantitatem bis sumptam. Similiter + 5fm & − 6fm reducitur

tur ad $-$ 1 sm, vel ad $-$ sm. Nam $-$ 6sm est quantitas sm sexies subtracta. & $+$ 5sm est eadem quantitas quinquies addita, ac proinde quantitas sm semel subtrahitur, & remanet negativa, seu fit $-$ sm. Eadem ratione operandum est in aliis quantitatibus utcumque compositis. Quantitates addendæ ita disponuntur, ut similes termini sibi invicem respondeant. Singulæ partes seorsim considerantur, ut simplices, & additio fit ut modo præscriptum est; summa autem infra lineolam scribitur. Sub terminis, qui sese mutuo destruunt, scribi solet stellula vel zero. Tota operatio patet ex præsenti exemplo. Si quantitates aliquæ fuerint dissimiles, eas signo $+$ vel $-$ connectendas esse evidens est. Ita si addi oporteat a & b, vel a & $-$ b, scribendum est a $+$ b, a b.

Exemplum.

$$\begin{array}{rrrr} 3ab - & 5cs - & 4dr + & 2s \\ - ab + & 4cs + & 4dr - & s \\ \hline 2ab - & cs & * + & s \end{array}$$

P R O B L. II.

Quantitates litterales subtrahere.

II. IN subtractione considerantur quantitates singulæ subtrahendæ tanquam si haberent signum ei, quod habent, contrarium, & fiat summa ex legibus jam præscriptis; nempe in quantitate subtrahenda mutetur signum $+$ in $-$ & $-$ in $+$, & additio de more fiat. Ita subtrahitur b ex a, scribendo a $-$ b. Si b $-$ c ex a $+$ c subtrahi oporteat, scribitur a $+$ c $-$ b $+$ c $=$ a $-$ b $+$ 2c. Simili modo in quan-

quantitatibus utcumque compositis operandum est. Quantitas subtrahenda inferiori loco scribitur, alia autem, ex quo subtractio fieri debet, supra apponitur; deinde mutatis signis, ut jam dictum est, tota quantitatum series scribitur, & postea reducitur, ut factum est in additione; habebitur quantitatum differentia infra lineolam scribenda.

Exemplum.

$$
\begin{array}{l}
ab + abb - dd \\
ab - bc + dd \\
\hline
ab + abb - dd - ab + bc - dd = aba + bc - 2dd
\end{array}
$$

Quod autem in quantitate subtrahenda signum − mutetur in +, ratio facile patet. Si ex a subtrahi debeat a − d, scribaturque primo a − b, subtractio justo major est; subtrahenda enim non proponitur tota quantitas b, sed b mulctata quantitate d; quare justo major est subtractio, & excessus est ipsa quantitas d, quæ proinde cum signo positivo + restitui debet, & scribendum est a − b + d. Id vero numerorum exemplo illustratur. Si ex numero 6 subtrahendus proponatur numerus 5 − 3, ex præscripta regula scribendum est 6 − 5 + 3, hoc est 4, reductione facta; quod evidens est. Si enim scriberes 6 − 5 − 3; subtraheres 8 ex 6, quod quidem faciendum non proponitur; cum enim sit 5 − 3 = 2, ex numero 6 subtrahi debet duntaxat numerus 2. Cæterum patet in calculo litterali non secus ac in arithmetico, additionem, & subtractionem sibi mutuam probationem præbere, ita ut operatio una per alteram mutuo exploretur.

PRO-

P R O B L. III.

Quantitates litterales multiplicare.

III. Signum multiplicationis est $\times$, quod tamen in multiplicatione facta per litteras omitti solet, & sola conjunctio literarum sine signo multiplicationem significat. Sit $a = 2$, $b = 10$; erit $ab = 2 \times 10 = 20$. Si eadem quantitas per seipsam multiplicetur, apponitur post ipsam paulo supra numerus, qui exprimat quoties scribenda esset. Ita $aa = a^2$, $aaa = a^3$. Cavendum ne confundatur a^2 cum $2a$; sit $a = 5$, erit $a^2 = 25$, $2a = 10$; sit $b = 2$, erit $(a + b)^2 = \overline{a + b}^2 = 7 \times 7 = 49$; parenthesis autem ( ), vel lineola — producta designat totam quantitatem $a + b$ in seipsam multiplicari. Numerus supra positus est *index*, seu *exponens potentiæ*, ut vocant, vel *potestatis*, seu *dignitatis* quantitatis ipsius, & exprimit quot vicibus unitas per illam quantitatem multiplicetur. Ita $1 \times a = a^1$; $1 \times a \times a = a^2$; $1 \times a \times a \times a = a^3$ &c.

In quantitatum compositarum multiplicatione scribenda est altera quantitas sub altera, cum tota prima quantitas multiplicanda per unum ex terminis secundæ, scribendo productum in una linea, deinde tota prima quantitas per aliam & ita porro, scribendo singula producta in singulis lineis, ac notando similes terminos diversorum hujusmodi productorum alios sub aliis, deinde omnium linearum colligenda summa. Omnium vero hujusmodi operationum patet ratio;

multiplicatio enim fit per partes non secus ac in quantitatibus simplicibus. Porro in multiplicatione quatuor operationis partes considerari debent, nempe signa, coefficientes, litteræ, & exponentes; hinc quatuor præscribuntur regulæ. 1. Si signa fuerint eadem, positiva scilicet, vel negativa; productum fit positivum: contra autem si fuerint diversa, productum est negativum. Ita $+ \times + = +$, $\times - = -$; $- \times + = -$; & $- \times - = +$. 2. Coefficientes in se invicem multiplicantur. 3. Litteræ ordine alphabetico scribuntur, nullo interposito signo. 4. Si quantitas aliqua exponente afficiatur, eaque multiplicari debeat per eamdem litteram exponente itidem affectam, littera illa semel in producto scribenda est; ita ut tamen hujus quantitatis exponens æqualis fiat exponentium summæ.

Exemplum.

Operatio tota patet exemplo. Quantitas multiplicanda superiori loco scribitur. Deinde multiplicatur per a, & producta singula infra lineolam scribuntur.

$$
\begin{array}{r}
a^2 + 2ac - bc \\
a - b \\
\hline
a^3 + 2a^2c - abc \\
- a^2b - 2abc + b^2c \\
\hline
a^3 - a^2b + 2a^2c - 3abc + b^2c
\end{array}
$$

Postea fit multiplicatio per $- b$, productaque infra apponuntur, & tandem productorum partes singulæ, ut moris est, in summam colliguntur. Id vero pro majori additionis facilitate observandum est, ut scilicet similes productorum partes aliæ sub aliis scribantur & sibi invicem respondeant, ut in additione præscripsimus. Quod spectat tres ultimas operationis partes, hæ satis

patent

patent ex antea demonstratis; verum quod attinet signorum leges, illarum rationem exponemus.

Signorum multiplicatio, quæ tyronibus difficultatem afferre solet, ex ipsa quantitatum negativarum natura intelligi potest. Dum quantitas positiva $+$ a multiplicatur per aliquem numerum positivum $+$n, sensus est quantitatem $+$ a toties sumi, quoties unitas continetur in n, ac proinde productum fit na.... Si $-$ a multiplicari debeat per n, sensus est $-$ a quantitatem negativam toties sumi, quoties unitas continetur in n, ideoque productum est $-$ na. Simili modo si multiplicetur $+$ a per $-$ n, sensus est quantitatem a, toties subtrahi quoties unitas continetur in n, ideoque productum est negativum seu $-$ na. Si $-$ a multiplicare oporteat per $-$ n, sensus est $-$ a, toties subtrahendum esse quoties unitas est in n; sed subtractio quantitatis negativæ $-$ a, æquivalet additioni $+$ a; quare productum est $+$ na. Nemo non videt productum ex quantitate positiva in positivam fieri positivum, sed alii casus hoc modo rursus illustrari possunt. Cum sit $+$ a $-$ a $=$ o, si multiplicetur $+$ a $-$ a per n, productum debet esse o. Jam vero primus producti terminus est na, ergo terminus alter debet esse $-$ na, qui destruat primum terminum $+$ na, ita ut productum sit $+$ na $-$ na $=$ o. Quare $-$ a $\times$ $+$ n $=$ $-$ na. Simili modo, si multiplicetur $+$ a $-$ a per $-$ n, primus producti terminus est $-$ na. Quare terminus alter est $+$ na; alioqui termini duo sese mutuo non destrue-

rent; quod tamen fieri debet cum sit $a - a = 0$. Ergo $-a \times -n = +na$.

PROBL. IV.

Quantitates litterales dividere.

IV. Signum divisionis est lineola interposita; dividendum separans a divisore, ita $\frac{a}{b}$, designat a dividi per b; divisio etiam designatur interpositis binis punctis hoc modo a:b. Verum his signis utendum est duntaxat, si divisio accurate fieri non possit; quod primum illustrabimus exemplo quantitatum, quæ unico constant termino. Si proponatur dividenda quantitas a^2bc per a^2c, erit $\frac{a^2bc}{a^2c} = b$, ac proinde quotus erit b. Simili ratione $\frac{6a^2bc}{12a^2c} = 3b$. At $\frac{10a^26}{6a^2c} = \frac{10b}{6c}$. In hoc sita est tota divisionis operatio ut ex dividendo & divisore expungantur litteræ utrique communes, reliquæ autem pro quoto habeantur. Si autem quantitates litterales coefficientibus afficiantur, evidens est divisionem institui debere non secus ac in arithmetica vulgari. Porro licet in dividendo & divisore deleantur litteræ communes, non tamen putandum est quotum ex quantitate per seipsam divisa esse $= 0$, ita $\frac{abc}{abc}$ non

est

est $= 0$, delentur quidem litteræ omnes, sed quantitati litterali præfixus semper intelligitur coefficiens 1; sic $\frac{abc}{abc} = \frac{1abc}{1abc} = \frac{1}{1} = 1$. Et quidem dum dividitur abc per abc, quæritur quoties abc continetur in abc. Sed quantitas quælibet semel in seipsa continetur. Quare in hoc casu, quotus est semper unitas. Quod signorum leges spectat, eædem omnino sunt quæ pro multiplicatione, nempe si $+$ dividatur per $+$, & $-$ per $-$, quotus signo $+$ afficitur; contra autem si dividatur $+$ per $-$, vel $-$ per $+$, quotus afficitur signo $-$. Tota explicatæ operationis ratio evidens est ex ipsa divisionis natura; cum enim productum ex divisore in quotum dividendo æquale esse debeat., manifestum est quotum ex divisione quantitatis negativæ per negativam, oportere esse positivum. Ponamus enim esse negativum; jam productum ex quoto negativo in divisorem negativum foret positivum, ac proinde non rediret quantitas dividenda quæ ponitur negativa. Simili ratione demonstrantur aliæ signorum leges.

Eodem plane modo operandum est in aliis divisionibus utcumque compositis. Ita si dividi oporteat $9ab^2 - 15a^2b + ba3$ per $-3ab + 2a^2$ Singuli termini ita disponi debent ut sumatur di-

Exemplum.

$6a3 - 15a^2b + 9ab1$	
$6a3 - 9a^2b$	$2a2 - 3ab$
$* - 6a2\ b + 9ab2$	$3a - 3b$
$+ 6a^2b - 9ab^2$	
$*\quad *$	

 visio-

visionis initium ab illo termino, qui ad maximam evectus est potestatem, & ita per gradus progrediendo, ut hic factum vides. Itaque dividas $6a3$ per $2a^2$, prodit quotus $3a$, per quem divisor totus multiplicatur, productumque $6a3 + 9a2 b$ subtrahas ex dividendo, residuum fit $- 6a^2 b$, cui addas $9ab^2$, & dividere pergas ut ante, quotus est $- 3b$, productumque ex hoc quoto & divisore iterum auferas ex dividendo, nihilque remanet; quare accurata est divisio. Si autem peracta operatione aliquid superfit ita ut divisor & reliqua pars dividendi nullas communes habeant quantitates, jam divisio accurate fieri non potest, sed quoto invento jungenda est fractio: de fractionibus autem tractabitur in proximo capite.

Sæpe contingit divisionem in infinitum continuari, & tunc quotus fit, ut vocant, *series infinita*. Exemplo sit unitas dividenda per $1 - a$. Operatio est hujusmodi.

$$
\begin{array}{l|l}
\quad 1 & \\
\hline
1 - a & 1 + a + aa + a3 + a4 \ \&c. \\
\hline
\quad + a & \\
+ a - aa & \\
\hline
\quad + aa & \\
\quad + aa - aaa & \\
\hline
\quad + aaa \ \&c. &
\end{array}
$$

quotus est $1 + a + aa + a3 + a4$ &c. in infinitum.

Hæc pauca exempla satis sint. Cæterum patet multiplicationem & divisionem in quantitatibus litteralibus non secus ac in numeris sibi mutuam probationem conferre, ita ut

ut multiplicatio per divisionem & viceversa divisio per multiplicationem confirmetur.

Schol. In hoc capite frequens fuit mentio de quantitatibus negativis, quarum genuinam notionem paucis iterum explicare non abs re erit. Si duæ quantitates magnitudine æquales, ad partes directe oppositas simul & in eodem subjecto conjunctæ intelligantur, sese mutuo destruunt, illarumque effectus nihilo æqualis est. Ita si potentiæ duæ æquales in partes directe oppositas agunt, virium illarum effectus nullus est. Pari modo si aliquis habeat 100 nummos, totidemque alteri debeat, jam illi 100 nummi, si ad hujus hominis possessionem referantur, pro nihilo considerari debent. Si autem quis 100 nummos habeat & 200 alteri debeat, jam possessio hujus hominis negativa est, & ut ita dicam, nihilo minor. Si aliquis ad propositum locum iter facturus, ad partem directe oppositam progrediatur, jam hujus hominis iter tanquam negativum & minus nihilo haberi debet, si ad finem propositum referatur. Igitur probe tenendum est quid intelligatur per quantitatem negativam & nihilo, ut dicunt, minorem. Quantitas negativa non minus realis est, quam quantitas positiva; sed nihilo minor dicitur ratione effectus tantum & *relative*, non autem *absolute*. Hunc loquendi modum a nonnullis usurpatum ita explicavimus, ut nihil difficultatis tyronibus facessere possit.

CAPUT IV.

De iisdem operationibus in numeris fractis.

I. NUmeri fracti definitionem jam in primo capite tradidimus. Si divisor excedat dividendum, duo numeri a se invicem, interposita lineola, separantur ita ut dividendus supra lineolam & divisor infra scribantur in hunc modum $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$ &c. Similiter si quantitas aliqua litteralis per aliam dividenda proponatur, & divisio fieri non possit, eodem modo scribuntur duæ quantitates; ita $\frac{a}{b}$ significat quotum ex a per b; tales autem quoti *fractiones* vocantur. Quantitas superior dicitur *numerator*, inferior autem *denominator* appellatur. Denominator exprimit numerum partium in quas totum aliquod divisum fingitur; numerator autem designat quot ejusdem partes accipiantur, vel, quod idem est, quoties una ex illis partibus sumatur, ac proinde pars illa considerari potest tanquam unitas aliqua. E. G. fractio $\frac{3}{4}$ nihil est aliud quam pars quarta alicujus totius ter sumpta; hæc autem pars quarta tanquam unitas altera haberi etiam potest.

II. Ex fractionum natura intelligitur qua ratione numerus integer ad fractum reducatur, atque etiam ad denominatorem datum.

Ita

Ita si numerus 3 reducendus proponatur ad fractionem cujus denominator sit 4; multiplicetur 3 per, 4, scribaturque $\frac{12}{4}$, erit hæc fractio æquivalens ternario, ut patet; cum numerus 3 multiplicetur simulque dividatur per 4. Sed tales fractiones in quibus numerator major est denominatore, pro veris fractionibus non habentur, atque *improprie* duntaxat ita appellantur. Pari ratione si quantitas a reduci debeat in fractionem litteralem cujus denominator sit b; habebitur

$$\frac{ab}{b} = a.$$

Ex his etiam patet quomodo fractiones, quæ diversum habent denominatorem, ad eundem redigantur. Sint fractiones duæ $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, multiplicetur fractio $\frac{a}{b}$, per d, simulque dividatur per d, erit $\frac{a \times d}{a \times d} = \frac{a}{b}$. Simili modo multiplicetur fractio $\frac{c}{d}$ per b, simulque dividatur, erit $\frac{c \times b}{d \times b} = \frac{c}{d}$. Itaque generatim fractiones ad eundem denominatorem reducuntur, multiplicando numeratorem unius per denominatorem alterius & viceversa, scribendoque pro denominatore communi productum ex utroque de-

nominatore. Evidens eſt hanc operationem eandem eſſe pro quolibet fractionum numero; multiplicentur ſcilicet numeratores ſinguli ſeorſim ſumpti per denominatores ſingulos, proprio excepto denominatore, producta ſingula dabunt numeratores ſingulos quæſitos. Deinde denominatores ſinguli in ſeipſos ducantur, habebitur denominator communis quæſitus; ita fractiones $\frac{a}{b}$, $\frac{b}{c}$, $\frac{c}{d}$, reducuntur ad $\frac{acd}{bcd}$, $\frac{bbd}{bcd}$, $\frac{ccd}{bcd}$. Patet rem perinde ſe habere in numeris quibuslibet fractis; ita fractiones $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, *reſpective* æquales ſunt fractionibus $\frac{40}{60}$, $\frac{45}{60}$, $\frac{48}{60}$.

III. Hinc facile adduntur & ſubtrahuntur fractiones, reducantur ſcilicet ad denominatorem communem, ſumatur numeratorum ſumma vel differentia, & ſubſcribatur denominator communis. In 1 caſu habebitur additio, in altero autem ſubtractio. Ita $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} + \frac{d}{e} = \frac{ade + bce + ddb}{bde}$, & $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - bc}{bd}$. Similiter in numeris $\frac{2}{3} + \frac{3}{4} = \frac{8 + 9}{12} = \frac{17}{12} = 1\frac{7}{12}$. Sed

4.

$\frac{4}{5} - \frac{3}{4} = \frac{16 - 15}{20} = \frac{1}{20}$. Fractiones ex integris & fractis compositæ qualis est $1.\frac{5}{12}$, appellantur mixtæ. Ex his autem statim intelligitur quomodo numeri integri & fracti simul addi possint, vel a se invicem subtrahi, integri ad fractos reducantur & ad denominatorem communem, atque operatio fiat ut ante. Quamvis autem additionis & subtractionis operationes ex dictis sint manifestæ, demonstrari tamen possunt hoc modo. Sint fractiones duæ $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{c}$ ad eumdem denominatorem reductæ, erit $\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a + c}{b}$, & $\frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a - c}{b}$.

Etenim ponatur $\frac{a}{b} = m$, & $\frac{c}{b} = n$, erit, facta multiplicatione per b, $a = mb$, $c = nb$, & $mb + nb = a + c$, ac proinde $m + n = \frac{a + c}{b}$, hoc est $\frac{a}{b} + \frac{c}{c} = \frac{a + c}{b}$. Simili modo patet esse $\frac{a}{b} - \frac{c}{b} = m - n = \frac{a - c}{b}$.

IV. Nulla reductione opus est ubi fractiones multiplicare & dividere oportet, in mul-

multiplicatione satis est numeratores & denominatores invicem ducere, habebitur numerator & denominator fractionis quæsitæ, quæ erit productum ex datis fractionibus emergens. Contra vero si fractio per aliam fractionem dividenda sit, numerator dividendæ per alterius denominatorem est multiplicandus, & illius denominator in hujus numeratorem ducendus est. Ita productum ex $\frac{a}{b}$ per $\frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$. Quotus autem ex $\frac{a}{b}$ per $\frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$. Etenim ponatur $\frac{a}{b} = m$, erit, ut ante $a = bm$. Similiter ponatur $\frac{c}{d} = n$, erit $c = dn$. Jam demonstrandum superest esse $\frac{ac}{bd} = mn$, & $\frac{ad}{bc} = \frac{m}{n}$; quod quidem facile patet, substituendo loco a & c, illorum valores bm & dn, erit enim in primo casu $\frac{bdmn}{bd} = mn$; in casu autem altero fiet $\frac{bdm}{bdn} = \frac{m}{n}$. Demonstratio generalis est ac proinde in numeris quibuslibet fractis eadem est operatio. Sic productum ex $\frac{2}{3}$ in $\frac{4}{6} = \frac{8}{18}$. Sic quotus est $\frac{3}{6}$ per $\frac{2}{16} = \frac{48}{12} = 4$. Manifesta quo-

que

que eſt operandi ratio, ſi numerus fractus per integrum multiplicari aut dividi debeat, conſiderari enim debet numerus integer tanquam fractio impropria, in qua denominator eſt unitas & reliqua peragenda ut ante. Quare patet in multiplicatione numerum integrum per numeratorem eſſe multiplicandum; contra autem in diviſione per denominatorem. Nec mirum eſſe debet, ſi fractio per fractionem diviſa præbeat numerum integrum, cum revera una fractio bis, ter, quater &c. in alia contineri poſſit. Itaque fractionis valor per multiplicationem minuitur, augetur per diviſionem; quod quidem paradoxum videtur iis qui multiplicationis & diviſionis naturam non ſatis attendunt.

Ex dictis etiam facile patet *fractiones fractionum* ad multiplicationem referri; *fractionem fractionis* appellant fractionis alicujus partem. Ita ſi ſumantur $\frac{2}{3}$, fractionis $\frac{3}{4}$, operatio illa ad diviſionem non pertinet, ſed ad multiplicationem. Etenim ſi ſumenda proponeretur duntaxat pars $\frac{1}{3}$ fractionis $\frac{3}{4}$, multiplicandus eſſet denominator per 3, haberetur que $\frac{3}{12}$. At ſumi non debet duntaxat pars tertia, duæ tertiæ partes ſumendæ proponuntur, quare productum præcedens duplo majus fieri debet, hoc eſt, numerator multiplicandus eſt per 2°. Eodem

dem modo reduci debent aliæ quotlibet fractiones fractionum, multiplicando numeratores singulos & singulos denominatores.

Ex fractionum doctrina colligi possunt operationum arithmeticarum compendia plurima, si de quantitatibus variæ speciei agatur. E. G. Quæritur quanti constiterint 35 mensuræ mercis alicujus, si mensuræ unius pretium sit 24 nummorum, & assium 15. Multiplicentur primo 35 per 24, erit productum 840. Quoad alteram multiplicationis partem, considerari potest esse 15 = 10 + 5. Jam si asses 10 nummo æquivalerent, productum foret 35. At sunt pars decima duntaxat nummi unius, quare 35 dividi debet per 10. Simili modo operandum est in ultima multiplicationis parte, atque emerget productum ex nummis nummorumque partibus compositum. Ille operandi modus dicitur operatio per partes *aliquotas*. Partes autem aliquotæ quantitatis alicujus appellantur, quæ ipsam quantitatem accurate dividunt; secus autem partes *aliquanta* vocantur. Cæterum exercitatio atque attentio multa docebunt, quæ fusius explicare superfluum esset.

V. Explicatis arithmeticæ operationibus in numeris fractis, jam superest ut communes, si quos habeant, fractionum divisores inquiramus. Si numeri nullum habeant communem divisorem præter unitatem, numeri illi inter se *primi* dicuntur, cujusmodi sunt 1, 5, 7, 11, 19; quos sola unitas metitur. At numeri *compositi* appellantur, quos præter unitatem alii quoque numeri metiuntur; sic 12 componitur ex 2 & 6,

item-

itemque ex 3 & 4. Quare 2, 3, 4, 6 metiuntur 12, seu aliquoties sumpti 12 adæquant; illi autem numeri dicuntur *factores* ipsius numeri 12. Si igitur fractionis alicujus denominator sit numerus compositus, & resolvi possit in alterius fractionis denominatorem, instituta divisione per numerum, qui sit etiam numeratoris divisor communis, jam licebit fractionem hanc ad minimos terminos deprimere, quod ita præstari potest. Dividatur major numerus per minorem; si nihil ex divisione superfit, jam minor numerus est maximus divisor communis. Si autem residuum aliquod fuerit, divisor datus per hoc residuum dividatur; & si divisio accurate fiat, primum residuum erit maximus divisor communis. Si autem divisio non sit accurata, sed alterum maneat residuum, per hoc secundum residuum dividatur primum; si autem nullum superfit tertium residuum, jam residuum secundum pro maximo divisore communi haberi debet; atque ita progrediendum, donec nihil superfit, atque ultimus divisor erit maxima, ut vocant, communis duorum numerorum mensura, qua inventa, fractio ex his duobus numeris composita ad minimos terminos reducitur. Exemplo sit fractio $\frac{91}{294}$. Dividatur 294 per 91, neglectoque quoto 3, residuum est 21. Rursus dividatur 91 per 21, iterumque neglecto quoto 4, residuum est 7. Tandem residuum primum 21 per alterum 7 dividatur, habetur quotus 3, & divisio est accurata. Quare numerus 7 est maximus communis di-

divisor, per quem divisis numeratore & denominatore, fractio præcedens in hanc simpliciorem abit $\frac{13}{42} = \frac{91}{294}$. Æquales autem esse fractiones illas, ex natura divisionis omnino patet. At si divisione instituta, ad unitatem tandem ultimum residuum perducatur, jam nulla est mensura communis præter unitatem. Eadem plane est operatio in quantitatibus litteralibus; hoc solum observandum est, nempe quantitates residuas per earum simplices divisores esse dividendas, & quantitates secundum ejusdem litteræ dignitatem semper esse ordinandas. Invenienda sit maxima communis mensura quantitatum $a^2 - b^2$, & $a^2 - 2ab + b^2$. Dividatur $a^2 - 2ab + b^2$ per $a^2 - b^2$ residuum fit $- 2ab + 2b^2$, quod dividatur per $- 2b$, ut reducatur ab $a - b$. Iterum dividatur $a^2 - b^2$ per $a - b$; divisio accurate succedit, ac proinde maximus divisor communis est $a - b$.

Tota hujus operationis ratio pendet ex hoc divisionis principio; si nempe quantitas aliqua metiatur & divisorem & residuum, metiri quoque debet ipsum dividendum; est enim dividendus æqualis producto ex divisore in quotum, & ipsi residuo simul. Ita in exemplo præcedenti $a - b$ metitur divisorem a^2 b^2 atque etiam residuum $- 2ab + 2b^2$, quare metiri etiam debet summam $a^2 - 2ab + b^2$.

Porro ubi residuum fit nullum, seu dum accurate succedit divisio, evidens est divisorem haberi maximum; cum enim dividendus æqualis sit producto ex divisore in quotum

tum & ipsi residuo simul; ubi residuum sit divisor accuratus; jam patet divisorem esse maximum; nulla enim quantitas habere potest divisorem seipsa majorem: ita sit $\frac{A}{B} = Q + R$; Q exprimit quotum, R residuum, erit $A = BQ + R$. Jam dividatur B, per R, & divisio succedat accurate, patet esse R maximum divisorem communem; dividit enim B, ex hypothesi, ac proinde & BQ; præterea dividit R; fieri autem non potest, ut R habeat divisorem seipso majorem. Quamvis in numeris & quantitatibus litteralibus eadem sit operatio; ut tamen divisor per residuum possit dividi, sæpe oportet primos terminos ita præparare, ut alter per alterum accurate dividi possit sine fractione. Id autem fit observando in novi divisoris primo termino quantitates, quæ non habentur in primo termino dividendi; si autem per eas dividi potest totus divisor, is totus dividatur; sin minus, multiplicetur totus dividendus per illas quantitates, quæ non occurrunt in dividendo; atque ita faciendum in tota operationis serie, si necesse sit. Ita in præcedenti exemplo, ubi perventum est ad residuum $-2ab + 2b^2$, residuum illud dividi præscripsimus per $-2b$. Hæc autem præscripta præparatio tota pendet ex hoc principio; nempe, quantitates duæ A, B communem retinebunt maximum divisorem, si multiplicetur, vel dividatur quantitas alterutra, puta A, per quantitatem, quæ nullum cum quantitate B communem divisorem habeat. Illud autem prin-

principium ex ipſa diviſoris communis notione eſt omnino evidens.

VI. De fractionum communi diviſore unum addendum eſt, quod deinde utilitatis maximæ eſſe debet. Si numeri duo *primi* fuerint, aut eorum alteruter duntaxat *primus* fuerit; evidens eſt ex ipſa numerorum primorum definitione, & ex communium diviſorum regula, numeros illos nullum, præter unitatem, diviſorem communem habere. Quare fractio ex duobus numeris primis compoſita, puta $\frac{a}{b}$ ad ſimpliciores terminos reduci non poteſt. Ergo productum ac, ex duobus numeris primis ab ipſo diverſis non poteſt accurate dividi per b. Nam ponatur $\frac{ac}{b} = m$, erit $\frac{a}{b} = \frac{m}{c}$, quod fieri non poteſt; oporteret enim b & c habere diviſorem communem, quod eſt contra hypotheſim. Similiter oſtendetur, fractionem $\frac{ac}{bd}$, in qua d eſt numerus primus, ad ſimpliciorem expreſſionem reduci non poſſe, atque ita deinceps; nempe generatim productum ex numeris primis quibuſcumque diviſum per productum ex aliis quibuſcumque numeris itidem primis ad ſimpliciores terminos reduci non poteſt. Quare ſi $\frac{a}{b}$ ſit fractio ad minimos terminos reducta, erunt quoque $\frac{aa}{bb}$, $\frac{aa}{bb}$, & generatim $\frac{aa}{bn}$ fractiones

ad

ad simplicissimos terminos redactæ; ac proinde fractio quælibet sive pura, sive mixta ad potentiam quamlibet evecta semper manet fractio.

Scholium. Præter fractiones in hoc capite explicatas considerari etiam debent fractiones, quæ *decimales* appellantur. Illæ scilicet fractiones pro denominatore habent unitatem cum tot sequentibus cyphris, quot sunt numeri in numeratore; atque eam ob causam non scribitur denominator, sed numerator duntaxat, cujus numeris præfixa est virgula, alii punctum præfigunt; quod fit, ut numerator a numeris integris distinguatur. Ita ad exprimendam fractionem $19\frac{4}{10}$ scribi solet 19, 4. Ad exprimendam fractionem $19\frac{4}{100}$ scribitur 19, 04; cyphra numero 4 præfixa indicat denominatorem esse 100; $19\frac{4}{1000}$ ita exprimitur 19, 004. Ex fractionum decimalium significatione patet, primum numerum post virgulam designare decadas, secundum centenarios, & ita deinceps per decades semper progrediendo; sic $4, 217 = 4 + \frac{2}{10} + \frac{1}{100} + \frac{7}{1000}$.

Fractionum decimalium utilitas maxima est ad obtinendum quotum proxime verum, si divisio accurate fieri non possit. E. G. Si dividendus proponatur numerus 147475 per 362, quotus invenitur 407 cum reliquo

141,

141, cui addatur o, dividaturque 1410 per 362, quotus erit 3 cum novo residuo 324, cui iterum addatur o, dividaturque 3240 per 362, quotus prodit 8 cum residuo 344, cui addatur o; in nova tandem divisione quotus emergit 9; quod autem remanet 182, iterum dividi posset; sed operationis ordinem exhibuisse satis sit. Quare quotus est 407, 389, quem quidem accuratiorem esse evidens est.

Eadem methodo fractio vulgaris in fractionem decimalem reducitur. Si fractio $\frac{3}{4}$ in fractionem decimalem reducenda proponatur, numeratori 3 addatur o, dividaturque 30 per 4, quotus est 7 cum residuo 2, cui addatur o, rursusque 20 per 4 dividatur, quotus est 5 sine ullo residuo; quare $\frac{3}{4} = 0, 75$. Et re quidem ipsa, cum sit 25 quarta pars numeri 100, numerus 75 erit $\frac{3}{4}$ ejusdem numeri 100. Hinc generatim patet, quo artificio fractio vulgaris ad decimalem reduci possit; multiplicetur nempe numerator fractionis datæ per 100, vel 1000 &c, productum illud divisum per denominatorem erit numerator fractionis decimalis, cujus denominator est 100, vel 1000 &c. Sæpe tamen contingit fractiones ad decimales accurate reduci non posse, etiamsi divisionum residuis plures utcumque cyphræ addantur. Sit $\frac{p}{q}$ fractio vulgaris reducenda ad fractionem decimalem $\frac{r}{10^n}$, in

qua

quæ n, exprimit cyphrarum numerum erit $= \frac{p \times 10^n}{q}$. Sed $10^n = 2^n 5^n$, ac proinde $r = \frac{p \times 2^n 5^n}{q}$. Ut autem r fiat numerus integer, oportet ut q sit æqualis potestati alicui numeri 2, vel 5, vel producti 2×5, vel etiam alicui potestati numeri 2, per aliquam potestatem numeri 5, quas tamen potestates minores esse oportet, quam n, est enim $\frac{p}{q}$, fractio ad minimos terminos reducenda (ex hyp.) ideoque p, q, nullum habent divisorem communem: in quolibet alio casu, fractio $\frac{p \times 10^n}{q}$ nunquam fieri poterit numerus integer r. At quo major erit numerus n, hoc est, quo plures erunt cyphræ in denominatore fractionis, eo propius $\frac{r}{10^n}$ accedat ad valorem fractionis $\frac{p}{q}$, ita ut error sit minor quam $\frac{1}{10^n}$. Etenim si dividatur $p \times 10^n$ per q, quotus r, erit justo minor; si vero augeatur unitate, fiet justo major. Quare $\frac{r}{10^n}$ minor est quam $\frac{p}{q}$, & $\frac{r+1}{10^n}$ major. Hinc patet utilissimum esse fractionum decimalium usum, cum earum ope fractionum va-

valor accuratus quam proxime haberi possit.

Quatuor Arithmeticæ operatiónes in fractionibus decimalibus eadem omnino ratione qua in numeris integris tractantur; sed habenda est maxime ratio virgulæ qua fractiones ab integris dirimuntur. Hæc virgula in eadem linea verticali jacere debet, si plures quantitates vel in unam summam colligendæ sunt vel ab invicem subtrahendæ. Si vero multiplicatio instituitur, eum locum in producto occupare debet virgula ut totidem post se notas relinquat quot erant in utraque fractione; tandem si divisio peragitur, dividendi numeri decimales notæ probe observandæ sunt; nam in quoto & divisore simul totidem esse debent post virgulam notæ quot erant in dividendo. Quatuor illarum operationum exempla exhibebimus.

Additio.

```
  23 , 304
   3 , 9567
 149 , 86
-----------
 177 , 1207
```

Subtractio.

```
 49 , 638
 17 , 16
----------
 32 , 478
```

Multiplicatio.

```
 12 , 35
  4 , 2
----------
 24 , 70
 49 , 40
----------
 51 , 470
```

Divisio.

```
 8 , 445
---------- = 2 , 7
 3 , 12
 6 , 44
----------
 2 , 005
 1 , 932
----------
      73
```

Unum

Unum autem in divisione notandum est: si nempe in divisore plures occurrant notæ decimales quam in dividendo, tunc decimalibus dividendi adjunges quot volueris cyphras, ita ut tamen notæ decimales in dividendo plures sint, quam in divisore, ut nempe in quoto aliquæ decimales notæ haberi possint. Tota operationum illarum ratio statim manifesta fiet, si fractiones decimales vulgari modo exprimantur. Ita in exemplo divisionis præcedentis $8 , 44 = \frac{8044}{1000}$ & $3 , 22 = \frac{322}{100}$. Itaque dividi debet fractio prior per secundam; evidens autem est cyphram unam duntaxat in quoto adesse, & hinc facile intelligetur cyphrarum numerum in quoto esse semper æqualem differentiæ cyphrarum in divisore & dividendo. In aliis tribus regulis facilius patet operandi ratio.

CAPUT V.

De radicum extractione.

I. Explicavimus jam in capite 2 quid sit *potestatum* formatio. Quantitatis alicujus *potestas prima*, vel *primus gradus* est quantitas ipsa solitarie spectata. Ita prima potestas ipsius a, est a. Productum ex quantitate aliqua in seipsam dicitur *potestas secunda*, vel etiam *quadratum*, ita a 2 est qua-

dratum. Ipsa autem quantitas dicitur *radix* quæ vocatur *quadrata*, si poteſtas ſit ſecunda vel quadratum. Si quadratum in ipſam quantitatem ducatur, productum dicitur *poteſtas tertia* vel *cubus*, ita a^3 eſt cubus ipſius a; quantitas autem dicitur *radix cubica*. Et generatim ſi quantitas evehatur ad poteſtatem cujus index eſt n, habebitur poteſtas gradus n. In hoc autem capite præſertim conſiderabimus radicum quadratæ & cubicæ extractionem, quod ut clare fiat, ipſam quadrati & cubi formationem primum inveſtigabimus, atque deinde ad operationes arithmeticas recto ordine progrediemur. Sit quantitas litteralis, $a + b$, ad quadratum evehenda, prodit $a^2 + 2ab + bb$. Jam vero quadrati hujus formationem, ſeu partes ſingulas expendamus. Quadratum binomii $a + b$ continet 1. Quadratum aa, primæ partis a. 2. Productum 2ab, ex duplo primæ partis in ſecundum. 3. Quadratum partis ſecundæ nempe bb. Simili modo ſi multiplicetur $a + b + c$ per $a + b + c$, orietur quadratum $a^2 + 2ab + b^2 + \overline{2a + 2b} \times c + c^2$. In hoc quadrato rurſus conſiderandæ ſunt partes ſingulæ; continent 1. Quadratum $a^2 + 2ab + b^2$ ex duobus primis terminis $a + b$. 2. Productum ex duplo duorum priorum terminorum in tertium terminum $= \overline{2a + 2b} \times c$. Tandem continet quadratum c^2, tertii termini. Simili modo progredi licet pro alia qualibet quantitate ex pluribus quam tribus terminis compoſita; tales vero quantitates magis compoſitæ appellari ſolent *polynomia*.

Ea-

Eadem omnino ratione intelligitur cubi formatio. Binomium $a + b$ ad 3 potestatem evehatur, multiplicetur nempe quadratum $a^2 + 2ab + b^2$, per $a + b$, prodit cubus $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$. Cubi hujus partes singulæ sunt 1. Cubus primi termini, nempe a^3. 2. Productum ex quadrato a^2 primi termini in triplum terminum secundum, scilicet $3a$ $2b$. 3. Productum ex primo termino a, in triplum quadratum secundi termini, nempe $3ab^2$. 4. Cubus secundi termini scilicet b^3.

Simili modo operandum est pro trinomio $a + b + c$ invenieturque cubus $a^3 + 3a$ $2b + 3ab^2 + b^3 + 3a2c + 6abc + 36ac + 3ac^2 + 3bc^2 + c^3$. In hoc autem cubo præter duorum primorum terminorum cubum nempe $a^3 + 3ab + b^3$, diligenter considerari debent aliæ partes. 1. Productum ex triplo quadrato duorum primorum terminorum in tertium terminum c, nempe

$3a^2c + 6abc + 3b^2c = \overline{a^2 + 2ab + bb} \times 3 \times c$. 2. Tripla summa duorum primorum terminorum per tertii termini quadratum multiplicata, scilicet $+ 3ac^2 + 3bc^2 = \overline{a + b} \times 3 \times c^2$. 3. Tandem tertii termini cubus, nempe c^3.

II. Ex potestatum compositione facile colligitur illarum resolutio, sive radicum extractio. Sit quantitas litteralis $x^2 - ax + \frac{1}{4}$, a^2, ex qua extrahenda sit radix quadrata x, cujus quadrato subtracto remanent

 ter-

termini duo $- ax + \frac{3}{4} a^2$. Deinde sumatur duplum ipsius x per quod dividatur secundus terminus $- ax$, quotus fit $- \frac{1}{2} a$, qui multiplicatur per x. Tandem fiat quadratum quoti $- \frac{2}{2} a$, atque producta illa ex residuo $- ax + \frac{1}{4} a^2$ subtrahantur, nihil remanet. Quare radix quadrata est $x - \frac{1}{2} a$. Tota operatio patet ex numero præcedenti. En typus calculi. Cæterum si radix plures habuerit quam duos terminos, jam duo primi termini post primam operationem velut unicus terminus considerari debent & reliqua peragenda ut ante, quod quidem patet ex demonstratis.

$$x^2 - ax + a^2 \,(x - \tfrac{1}{2} a$$
$$x^2$$
$$\overline{}$$
$$2x - \tfrac{1}{2} a) - ax + \tfrac{1}{4} a,$$
$$x - \tfrac{1}{2} a) - ax + \tfrac{1}{2} a^2$$
$$\overline{}$$
$$0 \quad 0$$

Proponatur extrahenda radix cubica ex quantitate litterali $c3 - 3c^2y + 3cx^2 - y3$. Ex primo termino extrahatur radix cubica, quę est

est c, cujus cubus c^3 auferatur, remanent termini $-3c^2y + 3cy^2 - y^3$. Jam quia notum est secundum terminum multiplicari per triplum quadratum primi, sumatur termini c triplum quadratum, per quod dividatur secundus terminus $-3c^2y$, prodit quotus $-y$, qui erit secunda pars radicis. Quia vero cubus quilibet continet cubum ex duobus primis terminis radicis; sumatur cubus terminorum $c - y$, deinde a reliquis terminis auferatur, quo facto nihil remanet, ac proinde radix accurata est $c - y$. Totus calculi typus ex præcedenti facile intelligitur.

III. Ex demonstrationibus præcedentibus facile patet radicum extractio in quantitatibus numericis. Extrahenda sit radix quadrata, ut in præsenti exemplo. Numerum datum in classes divide quarum singulæ duas notas contineant, initio a postremis facto; nihil autem refert sive unica tantum nota constet prima classis sive notis duabus. Quære radicem veram aut proxime veram numeri 38, quæ in nostro casu est 6. Scribe 6 loco radicis, & ejus quadratum 36 aufert ex 38. Residuo 2 adjunge notas classis proxime sequentis, & hujus novi numeri postrema nota neglecta, quære quoties duplum radicis hactenus inventæ sive 12 contineatur in 29, invenietur 2, scribe ergo 2 in radice, & ex 294 aufert productum ex 2 in 122 nempe 244, remanet 50; huic autem

residuo adnecte notas classis proxime sequentis. Rursus contempta novi numeri postrema nota, quære quoties duplum radicis hactenus inventæ scilicet 124 contineatur in 408, quotus erit 4, iterumque ex numero superiori aufer productum ex 1244 in 4, nempe 4976, residuum est 113. Quare radix proxime vera numeri propositi est 624; numerus autem ille foret perfecte quadratus si numero 113 minueretur. Quamvis autem	*Exempl.* 38, 94, 89 | 624, 09. 36 ——— 294 122 244 ——— 5089 1244 4976 ——— 11300 12480 0 ——— 1130000 124809 1123281 ——— 6719, &c.

radix quadrata non sit accurate vera, ad eam tamen fractionum decimalium ope pro arbitrio licet accedere. Residuo 113 addantur cyphræ duæ, ut hic factum vides; & habeatur numerus 624 tanquam prima pars radicis cujus duplum sumatur nempe 1248, dividaturque 11300 per 1248, quotus est 0; quare scribe 0, in radice, & multiplica 12480 per 0, productumque 0 aufer ex 11300, remanet 11300. Huic residuo iterum addantur cyphræ duæ; summaturque duplum radicis nempe 12480 per quod dividatur 113000, scribaturque quotus 9 in radice, per quem multiplicetur numerus 124809, productumque 1123281 auferatur ex 1130000, residum fit 6719. Operatio rursus continuari pos-

possset, sed satis patet methodus cujus ope radicem proximæ veram obtinere licet, & ad eam magis ac magis accedere. Tota operationis ratio manifesta est ex fractionum decimalium natura.

In hujus operationis serie idem notare oportet quod in divisione observatum est; nempe si post adjectas alicui residuo notas duas classis proxime sequentis, duplum radicis inventæ non contineatur in numero, qui per illud duplum dividendus est; postrema hujus dividendi nota neglecta, cyphra scribenda est in radice, & classis proximæ notis duabus demissis, operatio continuanda. Evidens autem est hanc operationem esse divisioni simillimam, in qua radix sit quotus, divisor vero sit duplum radicis postremo inventæ auctum nota quæ deinceps investigatur. Hoc unum interest, quod in divisione divisor semper est idem, hic autem semper augetur; in divisione totus divisor cognoscitur, hic autem ignota est novi divisoris nota, quæ inquiritur; atque id in causa est cur in hac divisione instituenda postrema dividendæ quantitatis nota præteреatur. Si contingeret divisorem esse majorem, V. G. in præsenti exemplo, si productum ex 2, in 122 subtrahi non posset ex 294, jam in radice scribendus esset numerus proxime minor & tota operatio esset reformanda. Sed in casu nostro id minime contingit; quare nulla correctione opus est. Unum tandem superest notandum, cur nempe post duplum radicis inventæ scribatur radix nova & deinde numerus totus per radicem novam multiplicetur. Ita in præsen-

ti exemplo post duplum primæ radicis 12, scribitur 2, totusque numerus 122 multiplicatur per novam radicem 2; operationis ratio manifesta est; cum enim numerus 2, in radice duas exprimat decadas, hujus numeri quadratum versus sinistram promoveri debet, ut patet ex notarum arithmeticarum significatione.

Ad radicis cubicæ extractionem jam veniendum est. Pro radice cubica methodus est admodum similis & iisdem innititur principiis. Extrahenda sit radix cubica, ut in præsenti exemplo. Diviso numero in classes per ternas notas incipiendo a postremis notis, prima classis, quæ poterat continere vel tres notas, vel duas, in hoc casu unicam continet. Quæratur radix cubica numeri 5, proxime minor quæ est 1. Hujus cubus 1, subtrahatur a prima classe 5, residuum est 4, cui adnectatur classis sequens, ut hic factum vides. Deinde ita dicendum: prima pars radicis 1 pro decade haberi debet si conferatur cum secunda parte. Sumatur itaque numeri 10 quadratum 100, & per illius triplum 300 di-

Exemplum.

5, 305, 472	174, 4
1	
4305	
300	
2100	
1470	
343	
3913	
392472	
86700	
346800	
8160	
64	
550324	
37448000	

vi-

vidatur 4305, invenietur quotus 7; quilibet enim alius foret justo major, si 7 excederet, ut patet operationem experiendo. Jam multiplicetur 300 per 7, habetur productum 2100. Dic præterea 7 × 7 = 49, & 49 × 10 = 490, postea 490 × 3 = 1470, quod scribe infra 2100. Tandem 7 × 7 × 7 = 343, quod scribi debet infra 1470. Addantur numeri 2100, 1470 & 343 & summa 3913 auferatur ex numero 4305, residuum est 392. Demittatur classis tertia 472, & duæ primæ partes radicis velut pars unica considerentur. Hæc autem pars quæ est 17, æquivalet 170 si conferatur cum tertia parte quæsita. Sumatur hujus numeri 170 triplum quadratum 86700, per quod dividatur pars cubi reliqua 392472, prodit quotus 4, quem scribe in radice; multiplicetur divisor 87700 per 4, productum fit 346800 quod infra scribitur. Dicas deinde 4 × 4 = 16; 16 × 170 × 3 = 8160, quod productum scribe infra 346800, atque infra scribi debet cubus ipsius 4 nempe 64. Addantur tres illæ quantitates, quarum summa 355024 ex reliqua cubi parte subtrahatur, residuum fit 37448. Quare numerus propositus non est cubus perfectus; sed ad radicem proxime veram licebit accedere si residuo addantur tres cyphræ, ut in præsenti exemplo factum est; & eadem operatio deinde pro alio quolibet fractionum decimalium numero iteretur, magis ac magis accurata fiet radix inventa. Illud autem observandum est diligenter, inventas radicis partes velut partem unicam tractandas esse, si pars alia investigari debeat.

In extractione radicis quadratæ & cubicæ, diximus tot esse radicis partes quot sunt diversæ numeri propositi partes. Id vero demonstratione indiget. Quantitas quælibet ex duobus constans numeris unicam duntaxat in radice partem habere potest; consideretur numerus 99, omnium qui duobus constent notis maximus. Deinde radicem ex duabus notis compositam omnium minimam 10, consideremus; quadratum erit 100 quod numero 99 majus est, ac proinde radix duas notas continere non potest. Similiter quantitas omnium minima quæ tres habeat notas est 100, cujus radix quadrata est 10 quæ proinde duas continet notas; at quantitas omnium maxima quæ tres habeat notas est 999, cujus radix tres notas habere non potest; nam numerus omnium minimus tribus constans notis est 100, cujus quadratum fit 10000 quod quidem numerum 999 longe excedit. Eadem ratione ad aliam quamlibet numerorum seriem progrediendo facile intelligitur præscripta numerorum divisio in extrahenda radice quadrata, & huic numerorum divisioni partium numerum in radice respondere evidens est. Idem simili ratiocinatione constat pro radice cubica. Manifestum est extractionem radicum simili ratione perfici in numeris fractis, extrahendo scilicet radicem propositam ex numeratore & ex denominatore. In qualibet autem radicum extractione, operationis rite peractæ facile habetur argumentum. Si radix sit quadrata, hæc in se ipsam ducatur productoque addatur residuum, si aliquod fuerit, facta operatione restitui debet ipse

ipse numerus propositus. Similiter radix cubica ad cubum evehatur; id vero statim patet ex ipsa earumdem operationum natura.

IV. Sæpe ab extrahenda radice supersedemus ubi veram invenire non licet, & quantitati propositæ præfigitur signum $\surd$ quod *radicale* appellant. Sic $\surd 3$ significat radicem quadratam numeri 3; $\sqrt[3]{10}$, denotat radicem cubicam denarii; & hi sunt numeri quos arithmetici vocant numeros *surdos*, sive *irrationales*, aut etiam *incommensurabiles*. Quantitatibus litteralibus idem signum præfigitur: ita $\surd ab$, $\sqrt[3]{abc}$, significant radicem quadratam ipsius ab, & radicem cubicam quantitatis abc. Sed commoditatis ergo radix secunda vel quadrata exprimi solet per $\frac{1}{2}$, radix cubica per $\frac{1}{3}$, ita $a\frac{1}{2}$, $a\frac{1}{3}$, $a\frac{1}{m}$, significat radicem quadratam, cubicam, & radicem quamlibet indeterminatam m. Ut autem clara talium expressionum notio habeatur, meminisse oportet quæ antea de exponentibus breviter dicta sunt.

Ponamus $a = b^2$, erit $a\frac{1}{2} = (bb)\frac{1}{2}$.

Præterea in quantitate $(bb)^3$ exponens 3 indicat quantitatem bb, ter scribendam esse, ac proinde $(bb)^3 = b^6$. Igitur eadem

dem ratione in quantitate $(bb)^{\frac{1}{2}}$, exponens $\frac{1}{2}$ designat litteram b, dimidio minus sumendam esse quam in bb, ac proinde semel tantum, quare $(bb)^{\frac{1}{2}} = b = a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$. Idem patet de aliis quibuscumque exponentibus. Res autem tota magis ac magis illustrabitur, explicatis quatuor arithmeticæ operationibus in quantitatibus surdis.

Quantitates surdæ adduntur vel subtrahuntur facillime, si ejusdem sint exponentis & eamdem habeant sub signo radicali quantitatem. Si autem res non ita se habeat, sæpissime contingit quantitates surdas ejusdem ordinis ad eamdem quantitatem sub signo radicali posse revocari. Ita si addi vel subtrahi debeant quantitates radicales $\sqrt{48abb}$, & $b\sqrt{75a}$, prima per reductionem mutatur in $4b\sqrt{3a}$, altera autem in $5b\sqrt{3a}$. Quare in 1 casu habebitur $9b\sqrt{3a}$, in altero autem $b\sqrt{3a}$. Totum reductionis artificium in eo consistit ut numeri sub signo radicali positi quærantur divisores, inter quos ille eligatur, si quis fuerit, ex quo liceat radicem extrahere ejusdem ordinis, cujus est surda quantitas. Si aliquem ejusmodi divisorem invenias, ejus radicem præfige signo radicali quo includatur tantummodo alter dati numeri coefficiens.

ciens. Si autem nullus talis divisor inveniri possit, jam quantitates radicales in additione signo + connectendæ, in subtractione autem signo − separandæ.

Demum multiplicantur & dividuntur quantitates irrationales non secus ac rationales, & producto vel quoto idem quod prius erat signum radicale præfigitur, quod quidem in utraque quantitate sit ejusdem ordinis. Ita si multiplicari debeant $\sqrt{ab} \times \sqrt{ac}$, productum erit $\sqrt{aabc} = a\sqrt{bc}$. Ita si dividi debeat $ac\sqrt{bc}$ per $a\sqrt{b}$ erit $\frac{a\sqrt{bc}}{a\sqrt{b}} = \sqrt{c}$. Patet autem in multiplicatione delendum esse signum radicale, si æquales fuerint quantitates signo inclusæ; sic $\sqrt{a^3 c} \times \sqrt{a^3 c} = a^3 c$. Quoniam sæpe contingit quantitates radicales ad eundem exponentem reducendas esse, observandum est id facile præstari posse ex hactenus demonstratis; ita quantitates duæ radicales $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$, & $\sqrt[m]{\frac{c}{d}}$ mutantur in $\sqrt[nm]{\frac{a^m}{b^m}}$, & $\sqrt[nm]{\frac{c^n}{d^n}}$, quod patet; nam quantitates illæ ad potestates n, m, respective evehuntur & simul deprimuntur. Probe autem notandum est discrimen inter quantitatum multiplicationem illarumque potestatem. Ita si multiplicari debeat a^3 per a^2 productum fit $a^3 + a^2 = a^5$. Si autem quantitas a^3 ad secundam potestatem

eve-

evehi debeat, habetur $x^2 = a^6$, & generatim quantitas a^m ad potestatem n evecta fit a^{mn}. Quare multiplicatio fit per *indicis* additionem, potestas autem per multiplicationem. Contraria ratione divisio fit per *exponentis* subtractionem, & radicis extractio per exponentis divisionem. Ita $\frac{a^6}{a^2} = a^{6-2} = a^4$. At si ex a^6 extrahenda sit radix quadrata, erit $a^{\frac{6}{2}} = a^3$, & generatim pro divisione $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$; at pro radicis n extractione habetur $a^{\frac{m}{n}}$. Si quantitates sint simplices, brevius per exponentes, quam per signum radicale exprimuntur.

V. Quantitates irrationales sive incommensurabiles sæpe in hoc capite nominavimus; revera autem tales dari quantitates evidens est ex capite præcedenti, in quo demonstravimus fractionem sive puram sive mixtam in fractionem semper abire, etiamsi ad potestatem quamlibet evehatur. Ergo numerus integer cujus radix quadrata, cubica &c. non est numerus integer, nullam fractionem nequidem mixtam pro radice habere potest, ac proinde hujus numeri radix est incommensurabilis. Itaque numeri incommensurabiles non sunt numeri proprie dicti. Et nequidem ipsa, cum per numerum nihil aliud intelligamus, quam rationem quan-

quantitatis cujusvis ad aliam ejusdem generis quantitatem, in omni ratione vel numero existere necessum est partem aliquotam quæ sit utrique quantitati communis; at quantitates inter se incommensurabiles tali carent mensura: ita $\sqrt{2}$ non est numerus proprie dictus; talis quantitas proprie non existit, eaque inveniri non potest. Imo fractiones proprie non dicuntur numeri nisi quatenus ad numeros integros revocantur.

Et quidem fractio $\frac{3}{4}$ quæ exprimit quartam partem totius alicujus ter sumptam, ipsa ad numeros integros refertur; hæc enim quarta pars velut alia unitas consideratur, ut antea observavimus. Totam incommensurabilium doctrinam utilissimam quidem, alio arithmetico exemplo illustrabimus. Si ex numero 7 extrahenda proponatur radix quadrata, hæc invenitur minor quam 3; cum $3 \times 3 = 9$ & major quam 2, cum sit $2 \times 2 = 4$. Igitur radix quadrata numeri 7 continetur intra limites 2 & 3, ac proinde si posset determinari, ea foret æqualis numero 2, & alicui numero fracto: sed fieri non potest ut fractio mixta per seipsam multiplicata producat numerum integrum, ut antea demonstravimus. Ergo numerus 7 pro radice habere non potest neque numerum integrum neque fractum. Idem patet de alio quolibet mumero integro cujus radix non est numerus integer.

Schol. Secundæ duntaxat & tertiæ potestatis compositionem ac resolutionem in præsenti

ſenti capite explicavimus; at rem generatim & breviter, quantum licet, pro alia qualibet dignitate conſiderabimus. Ex hactenus explicatis manifeſtum eſt eodem modo formari altiores cujuslibet gradus poteſtates. Ita ad formandam quarti gradus poteſtatem multiplicari debet cubus per ſuam radicem & ſic deinceps. Jam in ſingulis terminis exponentes & coefficientes diligenter obſervemus. In poteſtatis cujuslibet compoſitione, primus terminus a, binomii cujuslibet, a + b, evehitur ad poteſtatem quæſitam V. G. a^2, ſi poteſtas ſecunda fuerit: in aliis ſequentibus terminis exponens quantitatis a, per unitatem decreſcit & in ultimo termino evaneſcit. Ita in ſecunda poteſtate habetur $2ab + b^2$. Contra autem poteſtas termini b, in primo termino non reperitur, ſed in 2 termino illius exponens eſt unitas, in 3 termino eſt 2, & ita creſcit per gradus, donec in ultimo termino exponenti poteſtatis quæſitæ æqualis fiat. Quare iiſdem gradibus, quibus decreſcunt exponentes ipſius a, creſcunt exponentes quantitatis b, atque in utraque quantitate exponentium ſumma ſemper eadem eſt, & poteſtatis quæſitæ exponenti æqualis; quod quidem in poteſtate qualibet experiri licet. Ita poteſtas 6^2 binomii a + b, invenitur $a^6 + 6a^5 b + 15a^4 b^2 + 30a^3 b^3 + 15a^2 b^4 + 6ab^5 + b^6$, in qua obſervare eſt exponentes quantitatis a; decreſcere ſecundum ſeriem numerorum 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0; contrario autem ordine creſcere exponentes quantitatis b, nempe hoc modo 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, ſummaque exponentium

tium in utroque termino est semper 6. Jam superest ut singulorum terminorum coefficientes observemus. Dividatur coefficiens præcedentis termini per exponentem ipsius b in termino dato, & quotum multiplica per exponentem ipsius a, in eodem termino, auctum unitate. Ita in præcedenti exemplo ubi termini sunt, a^6, $a^5 b$, $a^4 b^2$, $a^3 b^3$, $a^2 b^4$, ab^5, b^6, coefficiens primi termini est unitas, coefficiens secundi est $\frac{1}{1} \times \overline{5+1} = 6$, tertii termini coefficiens $\frac{6}{2} \times \overline{4+1} = 3 \times 5 = 15$. Coefficiens termini quarti est $\frac{15}{3} \times \overline{3+1} = 5 \times 4 = 20$. Et simili modo invenientur coefficientes alii 15, 6, 1.

Ex hac constanti exponentium & coefficientium serie, generatim exhiberi potest binomium a + b ad potestatem quamlibet m, evectum. Ita terminorum series se habebit, non consideratis coefficientibus, a^m, $a^{m-1} b$, $a^{m-2} b^2$, $a^{m-3} b^3$, $a^{m-4} b^4$, quæ seties continuari debet, donec exponens quantitatis b, evadat m. Coefficientes autem ex præcedenti regula hoc ordine progredientur 1, m, $m \times \frac{m-1}{2}$, $m \times \frac{m-1}{2} \times \frac{m-2}{3}$, $m \times \frac{m-1}{2} \times \frac{m-2}{3} \times \frac{m-3}{4}$, & ita deinceps,

Qua-

viso ; exponens vero rationis arithmeticæ est differentia consequentis ab antecedenti. Hinc ratio geometrica ad instar fractionis scribitur, arithmetica ad instar subtractionis. Duarum rationum æqualitas *proportio* dicitur, *geometrica* vel *arithmetica* pro rationum ipsarum qualitate ; igitur in omni proportione quatuor quantitates esse debent, & *prima ad secundam esse* dicitur *ut tertia ad quartam*. Si vero eadem quantitas bis assumatur, ita ut primæ rationis consequens idem sit cum antecedente secundæ, proportio dicitur *continua*. Ita exprimi solet proportio geomettica a, b :: c, d, vel a : b $=$ c : d, vel $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, arithmetica vero a $-$ a $\div$ c $-$ d.

II. Si inter duas primas quantitates eadem sit differentia quæ inter duas ultimas, jam quantitates illæ sunt *arithmetice proportionales*, ut patet ex præcedenti definitione, quare arithmetice proportionales sunt numeri 3, 7, 12, 16; atque etiam quantitates a, a $+$ b, e, e $+$ b. Si autem talis proportio continuetur ita ut quantitates per eandem constantem differentiam perpetuo crescant vel decrescant, jam habetur series vel *progressio arithmetica*, qualis est ista a, a $+$ b, a $+$ 2b, a $+$ 3b &c., vel hæc alia x, x $-$ b, x $-$ 2b &c. aut etiam in numeris 1, 2, 3, 4, 5 &c., & 10, 7, 4, 1, $-$ 2 $-$ 5 $-$ 8 &c. Ex ipsa proportionis arithmeticæ natura evidens est summam extremorum terminorum æqualem esse summæ mediorum. Ita in propor-

tio-

tione arithmetica a, a + b, c, c + b, manifestum est summam extremorum a + c + b, æqualem esse summæ mediorum a + b + c. Hinc datis tribus quantitatibus facile invenitur quarta arithmetice proportionalis; addantur scilicet secunda & tertia, atque ex summa auferatur prima, differentia erit quartus terminus arithmetice proportionalis, ut patet.

Inde etiam colligitur in progressione qualibet arithmetica summam duorum extremorum æqualem esse summæ duorum quorumlibet terminorum ab extremis æque distantium. Sint priores termini, a a + b, a + 2b &c., sitque ultimus terminus x, erit penultimus x − b, antepenultimus x − 2b &c. Jam comparentur inter se termini qui ab extremis æque distant in hunc modum:

$$\begin{array}{l} a,\ a+b,\ a+2b,\ a+36,\ a+ab\ \&c. \\ x,\ x-b,\ x-2b,\ x-3b,\ x-4b\ \&c. \\ \hline a+x.\ a+x,\ a+x,\ a+x,\ a+x\ \&c. \end{array}$$

Si nempe singuli termini correspondentes, & qui ab extremis æqualiter distant sibi invicem addantur, habebitur semper a + x, hoc est, summa primi termini a, & ultimi x; atque hinc etiam evidens est summam omnium terminorum in progressione arithmetica æqualem esse producto ex summa primi & ultimi in dimidium terminorum numerum. Ita si numerus terminorum dicatur n, erit omnium summa $\overline{a+x} \times \frac{n}{2}$.

III. Cum differentia communis termino-
rum

Quare hæc habetur generalis formula $\overline{x \pm a}^{\,m} = x^m \pm \frac{m}{1} x^{m-1} a \pm \frac{m}{1} \times \frac{m-1}{2} x^{m-2} a^2 \pm \frac{m}{1} \times \frac{m-1}{2} \pm \frac{m-2}{3} x^{m-3} a^3$ &c. Simili modo invenitur formula pro binomio $\overline{a - b}^{\,m}$, hoc ſolum diſcrimine quod terminus debeat eſſe negativus, ſi exponens quantitatis b, ſit numerus impar. Ita in cubo $a^3 - 3a^2 b + 3ab^2 - b^3$, ſecundus & quartus termini ſunt negativi; ratio autem eſt evidens, cum negativa exiſtente quantitate, multiplicationum numerus impar productum efficere debeat negativum. Formula eadem omnino ratione componi poſſet pro trinomio $a \pm b \pm c$, ponendo $a \pm b = a$, & ita deinceps pro polynomio quolibet. Præcedens formula quæ poteſtatum compoſitionem exhibet, earum quoque reſolutionem repræſentare poteſt. Ita radix quadrata binomii $a \pm b$, nihil eſt aliud quam poteſtas binomii $a \pm b$, cujus exponens $\frac{1}{2}$. Quare ponatur in formula præcedenti $m = \frac{1}{2}$, habebiturque $\overline{a \pm b}^{\,\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}} \left(1 \pm \frac{b}{2a} - \frac{b^2}{8a^2} \pm \frac{b^3}{16a^3} \text{ \&c.}\right)$. Simili modo ſi extrahenda ſit *radix* quinta ex

ex a + b habebitur $\overline{a+b}^{\frac{1}{5}} = a^{\frac{1}{5}} + \frac{1}{5} a^{-\frac{4}{5}} b - \frac{1 \times 4}{2 \times 25} a^{-\frac{9}{5}} b^2$ &c $= a^{\frac{1}{5}} \times 1 + \frac{b}{5a} - \frac{2bb}{25aa} +$ &c. Itaque ad radicem proxime veram accedere poſſumus per ſeries infinitas, dummodo ſeries illæ ſint *convergentes*, hoc, eſt, ſi termini perpetuo decreſcant.

C A P U T VI.

De proportionibus.

I. IN memoriam revocanda eſt explicata cap. 1 rationis & proportionis definitio. *Ratio* dicitur ea duarum quantitatum *habitudo*, qua ad ſe invicem referuntur; *geometrica* dicitur ſi in ea relatione conſideremus quomodo quantitas una alteram contineat; *arithmetica* vocatur; ſi exceſſum tantummodo unius ſupra aliam ſpectemus. In omni ratione quantitas quæ ad aliam refertur, *antecedens* dicitur, ea vero ad quam refertur, *conſequens* appellatur. Ratio geometrica dicitur *dupla*, *tripla*, *decupla* &c., ſi antecedens bis, ter, decies &c. conſequentem continet; contra vero *ſubdupla*, *ſubtripla*, *ſubdecupla* &c., ſi bis, ter, decies &c. antecedens in conſequenti continetur. *Exponens* rationis geometricæ dicitur quotus ex antecedenti per conſequentem diviſo;

viso ; exponens vero rationis arithmeticæ est differentia consequentis ab antecedenti. Hinc ratio geometrica ad instar fractionis scribitur, arithmetica ad instar subtractionis. Duarum rationum æqualitas *proportio* dicitur, *geometrica* vel *arithmetica* pro rationum ipsarum qualitate ; igitur in omni proportione quatuor quantitates esse debent, & *prima ad secundam esse* dicitur *ut tertia ad quartam*. Si vero eadem quantitas bis assumatur, ita ut primæ rationis consequens idem sit cum antecedente secundæ, proportio dicitur *continua*. Ita exprimi solet proportio geomettica a, b :: c, d, vel a : b $= c : d$, vel $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, arithmetica vero $a - a \div c - d$.

II. Si inter duas primas quantitates eadem sit differentia quæ inter duas ultimas, jam quantitates illæ sunt *arithmetice proportionales*, ut patet ex præcedenti definitione, quare arithmetice proportionales sunt numeri 3, 7, 12, 16; atque etiam quantitates a, $a + b$, e, $e + b$. Si autem talis proportio continuetur ita ut quantitates per eandem constantem differentiam perpetuo crescant vel decrescant, jam habetur series vel *progressio arithmetica*, qualis est ista a, $a + b$, $a + 2b$, $a + 3b$ &c., vel hæc alia x, $x - b$, $x - 2b$ &c. aut etiam in numeris 1, 2, 3, 4, 5 &c., & 10, 7, 4, 1, -2, -5, -8 &c. Ex ipsa proportionis arithmeticæ natura evidens est summam extremorum terminorum æquatem esse summæ mediorum. Ita in propor-

tio-

tione arithmetica a, $a \pm b$, c, $c \pm b$, manifestum est summam extremorum $a \pm c \pm b$, æqualem esse summæ mediorum $a \pm b \pm c$. Hinc datis tribus quantitatibus facile invenitur quarta arithmetice proportionalis; addantur scilicet secunda & tertia, atque ex summa auferatur prima, differentia erit quartus terminus arithmetice proportionalis, ut patet.

Inde etiam colligitur in progressione qualibet arithmetica summam duorum extremorum æqualem esse summæ duorum quorumlibet terminorum ab extremis æque distantium. Sint priores termini, a $a \pm b$, $a \pm 2b$ &c., sitque ultimus terminus x, erit penultimus $x - b$, antepenultimus $x - 2b$ &c. Jam comparentur inter se termini qui ab extremis æque distant in hunc modum:

$$\begin{array}{l} a,\ a \pm b,\ a \pm 2b,\ a \pm 36,\ a \pm ab\ \&c. \\ x,\ x - b,\ x - 2b,\ x - 3b,\ x - 4b\ \&c. \\ \hline a \pm x.\ a \pm x,\ a \pm x,\ a \pm x,\ a \pm x\ \&c. \end{array}$$

Si nempe singuli termini correspondentes, & qui ab extremis æqualiter distant sibi invicem addantur, habebitur semper $a \pm x$, hoc est, summa primi termini a, & ultimi x; atque hinc etiam evidens est summam omnium terminorum in progressione arithmetica æqualem esse producto ex summa primi & ultimi in dimidium terminorum numerum. Ita si numerus terminorum dicatur n, erit omnium summa $\overline{a \pm x} \times \frac{n}{2}$.

III. Cum differentia communis terminorum

rum in progressione arithmetica primum terminum non afficiat, patet hujus differentiæ coefficientem in quolibet dato termino æqualem esse numero terminorum qui terminum datum præcedunt. Quare in ultimo termino x, habebitur $\overline{n-1}\times b$, nempe $x = a + \overline{n-1}\times b$. Igitur cum omnium terminorum summa sit $\overline{a+x}\times\frac{n}{2}$, ea quoque invenitur $= \frac{2an + n^2 b - nb}{2}$ $= \left(a + \frac{\overline{nb-b}}{2}\right)\times n$. E. G. Series arithmetica $1+2+3+4+5$ &c. ad 100 terminos producta $= \frac{2\times 100 + 10000 - 100}{2}$ $= 5050$. At si progressionis primus terminus fuerit o, erit progressionis summa æqualis dimidio producto ex ultimo termino in numerum terminorum. Nam in hoc casu cum sit $a = o$, summa terminorum quæ generatim exprimitur per $\overline{a+x}\times\frac{n}{2}$, in hanc abit $\frac{xn}{2}$. Unde evidens est summam numeri cujuslibet terminorum in progressione arithmetica cujus primus terminus est o, æqualem esse dimidio producto ex terminorum numero in terminum maximum. E. G. Progressio arithmetica.

$$\frac{\begin{matrix}0+1+2+3+4+5+6+7+8+9 = \\ 9+9+9+9+9+9+9+9+9+9 = \end{matrix}}{2}$$

$$\frac{10 \times 9}{2} = 45.$$

IV. Si quotus ex duabus primis quantitatibus æqualis sit quoto ex duabus ultimis, quatuor illæ quantitates sunt *geometrice proportionales*, ut patet ex præcedenti definitione. Tales sunt numeri 2, 6, 4, 12, & quantitates a, ar, b, br. Ex ipsa proportionis geometricæ natura evidens est productum ex terminis extremis æquale esse producto ex mediis, sic $a \times br = ar \times b$, ut patet. Quare datis tribus terminis facile invenitur quartus geometrice proportionalis, multiplicando scilicet duos medios terminos productumque dividendo per primum, quotus erit quartus terminus quæsitus; ita datis tribus quantitatibus a, ar, b, invenitur quarta $\frac{ar \times b}{a} = br$. At si proportio sit continua, ita ut secunda quantitas sit primæ rationis consequens & simul secundæ rationis antecedens, simili ratiocinatione patet sumendum esse hujus quantitatis quadratum, illudque per primam quantitatem esse dividendum. Hæc autem quantitas quæ antecedentis & consequentis vices gerit, vocatur *media proportionalis*, talisque proportio ita exprimi solet ∺ a, b, c, nempe hoc scribendi modo significatur b, esse mediam proportionalem. At media proportionalis arithmetica ita designatur ÷ a, b, c, patet

In extractione radicis quadratæ & cubicæ, diximus tot esse radicis partes quot sunt diversæ numeri propositi partes. Id vero demonstratione indiget. Quantitas quælibet ex duobus constans numeris unicam duntaxat in radice partem habere potest; consideretur numerus 99, omnium qui duobus constent notis maximus. Deinde radicem ex duabus notis compositam omnium minimam 10, consideremus; quadratum erit 100, quod numero 99 majus est, ac proinde radix duas notas continere non potest. Similiter quantitas omnium minima quæ tres habeat notas est 100, cujus radix quadrata est 10 quæ proinde duas continet notas; at quantitas omnium maxima quæ tres habeat notas est 999, cujus radix tres notas habere non potest; nam numerus omnium minimus tribus constans notis est 100, cujus quadratum fit 10000 quod quidem numerum 999 longe excedit. Eadem ratione ad aliam quamlibet numerorum seriem progrediendo facile intelligitur præscripta numerorum divisio in extrahenda radice quadrata, & huic numerorum divisioni partium numerum in radice respondere evidens est. Idem simili ratiocinatione constat pro radice cubica. Manifestum est extractionem radicum simili ratione perfici in numeris fractis, extrahendo scilicet radicem propositam ex numeratore & ex denominatore. In qualibet autem radicum extractione, operationis rite peractæ facile habetur argumentum. Si radix sit quadrata, hæc in se ipsam ducatur productoque addatur residuum, si aliquod fuerit, facta operatione restitui debet ipse

ipse numerus propositus. Similiter radix cubica ad cubum evehatur; id vero statim patet ex ipsa earumdem operationum natura.

IV. Sæpe ab extrahenda radice supersedemus ubi veram invenire non licet, & quantitati propositæ præfigitur signum $\surd$ quod *radicale* appellant. Sic $\surd\ 3$ significat radicem quadratam numeri 3; $\sqrt[3]{10}$, denotat radicem cubicam denarii; & hi sunt numeri quos arithmetici vocant numeros *surdos*, sive *irrationales*, aut etiam *incommensurabiles*. Quantitatibus litteralibus idem signum præfigitur: ita $\surd\ ab$, $\sqrt[3]{abc}$, significant radicem quadratam ipsius ab, & radicem cubicam quantitatis abc. Sed commoditatis ergo radix secunda vel quadrata exprimi solet per $\frac{1}{2}$, radix cubica per $\frac{1}{3}$, ita $a\frac{1}{2}$, $a\frac{1}{3}$, $a\frac{1}{m}$, significat radicem quadratam, cubicam, & radicem quamlibet indeterminatam m. Ut autem clara talium expressionum notio habeatur, meminisse oportet quæ antea de exponentibus breviter dicta sunt. Ponamus $a = b^2$, erit $a\frac{1}{2} = (bb)\frac{1}{2}$. Præterea in quantitate $(bb)^3$ exponens 3 indicat quantitatem bb, ter scribendam esse, ac proinde $(bb)^3 = b^6$. Igitur ea-

dem ratione in quantitate $(bb)^{\frac{1}{2}}$, exponens $\frac{1}{2}$ designat litteram b, dimidio minus sumendam esse quam in bb, ac proinde semel tantum, quare $(bb)^{\frac{1}{2}} = b = a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$. Idem patet de aliis quibuscumque exponentibus. Res autem tota magis ac magis illustrabitur, explicatis quatuor arithmeticæ operationibus in quantitatibus surdis.

Quantitates surdæ adduntur vel subtrahuntur facillime, si ejusdem sint exponentis & eamdem habeant sub signo radicali quantitatem. Si autem res non ita se habeat, sæpissime contingit quantitates surdas ejusdem ordinis ad eamdem quantitatem sub signo radicali posse revocari. Ita si addi vel subtrahi debeant quantitates radicales $\sqrt{48abb}$, & $b\sqrt{75a}$, prima per reductionem mutatur in $4b\sqrt{3a}$, altera autem in $5b\sqrt{3a}$. Quare in 1 casu habebitur $9b\sqrt{3a}$, in altero autem $b\sqrt{3a}$. Totum reductionis artificium in eo consistit ut numeri sub signo radicali positi quærantur divisores, inter quos ille eligatur, si quis fuerit, ex quo liceat radicem extrahere ejusdem ordinis, cujus est surda quantitas. Si aliquem ejusmodi divisorem invenias, ejus radicem præfige signo radicali quo includatur tantummodo alter dati numeri coefficiens.

ciens. Si autem nullus talis divisor inveniri possit, jam quantitates radicales in additione signo + connectendæ, in subtractione autem signo — separandæ.

Demum multiplicantur & dividuntur quantitates irrationales non secus ac rationales, & producto vel quoto idem quod prius erat signum radicale præfigitur, quod quidem in utraque quantitate sit ejusdem ordinis. Ita si multiplicari debeant $\sqrt{ab} \times \sqrt{ac}$, productum erit $\sqrt{aabc} = a\sqrt{bc}$. Ita si dividi debeat $ac\sqrt{bc}$ per $a\sqrt{b}$ erit $\frac{a\sqrt{bc}}{a\sqrt{b}} = \sqrt{c}$. Patet autem in multiplicatione delendum esse signum radicale, si æquales fuerint quantitates signo inclusæ; sic $\sqrt{a3\ c} \times \sqrt{a3\ c} = a3\ c$. Quoniam sæpe contingit quantitates radicales ad eundem exponentem reducendas esse, observandum est id facile præstari posse ex hactenus demonstratis; ita quantitates duæ radicales $\sqrt[2]{\frac{a}{b}}$, & $\sqrt[m]{\frac{c}{d}}$ mutantur in $\sqrt[nm]{\frac{a^m}{b^m}}$, & $\sqrt[nm]{\frac{c^n}{d^n}}$, quod patet; nam quantitates illæ ad potestates n, m, respective evehuntur & simul deprimuntur. Probe autem notandum est discrimen inter quantitatum multiplicationem illarumque potestatem. Ita si multiplicari debeat a3 per a^2 productum fit a3 + a2 = a5. Si autem quantitas a3 ad secundam potestatem eve-

evehi debeat, habetur $X_2 = a^6$, & generatim quantitas a^m ad potestatem n evecta fit a^{mn}. Quare multiplicatio fit per *indicis* additionem, potestas autem per multiplicationem. Contraria ratione divisio fit per *exponentis* subtractionem, & radicis extractio per exponentis divisionem. Ita $\frac{a^6}{a^2} = a^{6-2} = a^4$. At si ex a^6 extrahenda sit radix quadrata, erit $a^{\frac{6}{2}} = a^3$, & generatim pro divisione $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$; at pro radicis n extractione habetur $a^{\frac{m}{n}}$. Si quantitates sint simplices, brevius per exponentes, quam per signum radicale exprimuntur.

V. Quantitates irrationales sive incommensurabiles sæpe in hoc capite nominavimus; revera autem tales dari quantitates evidens est ex capite præcedenti, in quo demonstravimus fractionem sive puram sive mixtam in fractionem semper abire, etiamsi ad potestatem quamlibet evehatur. Ergo numerus integer cujus radix quadrata, cubica &c. non est numerus integer, nullam fractionem nequidem mixtam pro radice habere potest, ac proinde hujus numeri radix est incommensurabilis. Itaque numeri incommensurabiles non sunt numeri proprie dicti. Et requidem ipsa, cum per numerum nihil aliud intelligamus, quam rationem quan-

quantitatis cujusvis ad aliam ejusdem generis quantitatem, in omni ratione vel numero existere necessum est partem aliquotam quæ sit utrique quantitati communis; at quantitates inter se incommensurabiles tali carent mensura: ita $\sqrt{2}$ non est numerus proprie dictus; talis quantitas proprie non existit, eaque inveniri non potest. Imo fractiones proprie non dicuntur numeri nisi quatenus ad numeros integros revocantur.

Et quidem fractio $\frac{3}{4}$ quæ exprimit quartam partem totius alicujus ter sumptam, ipsa ad numeros integros refertur; hæc enim quarta pars velut alia unitas consideratur, ut antea observavimus. Totam incommensurabilium doctrinam utilissimam quidem, alio arithmetico exemplo illustrabimus. Si ex numero 7 extrahenda proponatur radix quadrata, hæc invenitur minor quam 3; cum $3 \times 3 = 9$ & major quam 2, cum sit $2 \times 2 = 4$. Igitur radix quadrata numeri 7 continetur intra limites 2 & 3, ac proinde si posset determinari, ea foret æqualis numero 2, & alicui numero fracto: sed fieri non potest ut fractio mixta per seipsam multiplicata producat numerum integrum, ut antea demonstravimus. Ergo numerus 7 pro radice habere non potest neque numerum integrum neque fractum. Idem patet de alio quolibet numero integro cujus radix non est numerus integer.

Schol. Secundæ duntaxat & tertiæ potestatis compositionem ac resolutionem in præ-

senti

evehi debeat, habetur $x^2 = a^6$, & generatim quantitas a^m ad potestatem n evecta fit a^{mn}. Quare multiplicatio fit per *indicis* additionem, potestas autem per multiplicationem. Contraria ratione divisio fit per *exponentis* subtractionem, & radicis extractio per exponentis divisionem. Ita $\frac{a^6}{a^2} = a^{6-2} = a^4$. At si ex a^6 extrahenda sit radix quadrata, erit $a^{\frac{6}{2}} = a^3$, & generatim pro divisione $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$; at pro radicis n extractione habetur $a^{\frac{m}{n}}$. Si quantitates sint simplices, brevius per exponentes, quam per signum radicale exprimuntur.

V. Quantitates irrationales sive incommensurabiles sæpe in hoc capite nominavimus; revera autem tales dari quantitate[s] evidens est ex capite præcedenti, in quo monstravimus fractionem sive puram mixtam in fractionem semper abire ad potestatem quamlibet evehat[ur] numerus integer cujus radi[x] bica &c. non est numer[us] fractionem nequidem r[...] bere potest, ac [...] est incomme[nsurabilis] commens[urabilis] dicti. [...]

[...]quan-

quantitatis cujusvis ad aliam ejusdem generis quantitatem, in omni ratione vel numero existere necessum est partem aliquotam quæ sit utrique quantitati communis; at quantitates inter se incommensurabiles tali carent mensura: ita $\sqrt{2}$ non est numerus proprie dictus; talis quantitas proprie non existit, eaque inveniri non potest. Imo fractiones proprie non dicuntur numeri nisi quatenus ad numeros integros revocantur.

Et quidem fractio $\frac{3}{4}$ quæ exprimit quartam partem totius alicujus ter sumptam, ipsa ad numeros integros refertur; hæc enim quarta pars velut alia unitas consideratur, ut antea observavimus. Totam incommensurabilium doctrinam utilissimam quidem, alio arithmetico exemplo illustrabimus. Si ex numero 7 ex[illegible]nda proponatur radix quadrata, h[illegible]itur minor
quam 3; cum 3×3 [illegible]ajor quam
2, cum sit [illegible] 2 = [illegible] radix qua-
drata n[illegible] co[illegible]a limites
2 & 3 [illegible]erminari,
ea fore [illegible] alicui nu-
mero [illegible]st ut fractio
mixt[illegible] producat nu-
mer[illegible] demonstravi-
m[illegible] dice habere
[illegible]tegrum ne-
[illegible]lio quolibet
[illegible]a est nume-
[illegible]rtiæ pote-
[illegible]em in præ-
senti

residuo adnecte notas classis proxime sequentis. Rursus contempta novi numeri postrema nota, quære quoties duplum radicis hactenus inventæ scilicet 124 contineatur in 408, quotus erit 4, iterumque ex numero superiori aufer productum ex 1244 in 4, nempe 4976, residuum est 113. Quare radix proxime vera numeri propositi est 624; numerus autem ille foret perfecte quadratus si numero 113 minueretur. Quamvis autem radix quadrata non sit accurate vera, ad eam tamen fractionum decimalium ope pro arbitrio licet accedere. Residuo 113 addantur cyphræ duæ, ut hic factum vides; & habeatur numerus 624 tanquam prima pars radicis cujus duplum sumatur nempe 1248, dividaturque 11300 per 1248, quotus est 0; quare scribe 0, in radice, & multiplica 12480 per 0, productumque 0 aufer ex 11300, remanet 11300. Huic residuo iterum addantur cyphræ duæ; summaturque duplum radicis nempe 12480 per quod dividatur 113000, scribaturque quotus 9 in radice, per quem multiplicetur numerus 124809, productumque 1123281 auferatur ex 1130000, residum fit 6719. Operatio rursus continuari pos-

Exempl.

```
38, 94, 89 | 624, 09
36
-------
  294
  122
  244
-------
  5089
  1244
  4976
-------
  11300
  12480
      0
-------
 1130000
  124809
 1123281
-----------
   6719, &c.
```

posset, sed satis patet methodus cujus ope radicem proximæ veram obtinere licet, & ad eam magis ac magis accedere. Tota operationis ratio manifesta est ex fractionum decimalium natura.

In hujus operationis serie idem notare oportet quod in divisione observatum est; nempe si post adjectas alicui residuo notas duas classis proxime sequentis, duplum radicis inventæ non contineatur in numero, qui per illud duplum dividendus est; postrema hujus dividendi nota neglecta, cyphra scribenda est in radice, & classis proximæ notis duabus demissis, operatio continuanda. Evidens autem est hanc operationem esse divisioni simillimam, in qua radix sit quotus, divisor vero sit duplum radicis postremo inventæ auctum nota quæ deinceps investigatur. Hoc unum interest, quod in divisione divisor semper est idem, hic autem semper augetur; in divisione totus divisor cognoscitur, hic autem ignota est novi divisoris nota, quæ inquiritur; atque id in causa est cur in hac divisione instituenda postrema dividendæ quantitatis nota prætereatur. Si contingeret divisorem esse majorem, V. G. in præsenti exemplo, si productum ex 2, in 122 subtrahi non posset ex 294, jam in radice scribendus esset numerus proxime minor & tota operatio esset reformanda. Sed in casu nostro id minime contingit; quare nulla correctione opus est. Unum tandem superest notandum, cur nempe post duplum radicis inventæ scribatur radix nova & deinde numerus totus per radicem novam multiplicetur. Ita in præsen-

ti exemplo post duplum primæ radicis 12, scribitur 2, totusque numerus 122 multiplicatur per novam radicem 2; operationis ratio manifesta est; cum enim numerus 2, in radice duas exprimat decadas, hujus numeri quadratum versus sinistram promoveri debet, ut patet ex notarum arithmeticarum significatione.

Ad radicis cubicæ extractionem jam veniendum est. Pro radice cubica methodus est admodum similis & iisdem innititur principiis. Extrahenda sit radix cubica, ut in præsenti exemplo. Diviso numero in classes per ternas notas incipiendo a postremis notis, prima classis, quæ poterat continere vel tres notas, vel duas, in hoc casu unicam continet. Quæratur radix cubica numeri 5, proxime minor quæ est 1. Hujus cubus 1, subtrahatur a prima classe 5, residuum est 4, cui adnectatur classis sequens, ut hic factum vides. Deinde ita dicendum: prima pars radicis 1 pro decade haberi debet si conferatur cum secunda parte. Sumatur itaque numeri 10 quadratum 100, & per illius triplum 300 di-

Exemplum.

```
5, 305, 472 | 174, 4
1
———
4305
 300
———
2100
1470
 343
———
3913
———
392472
 86700
———
346800
  8160
    64
———
550324
———
37448000
```

vi-

vidatur 4305, invenietur quotus 7; quilibet enim alius foret justo major, si 7 excederet, ut patet operationem experiendo. Jam multiplicetur 300 per 7, habetur productum 2100. Dic præterea $7 \times 7 = 49$, & $49 \times 10 = 490$, postea $490 \times 3 = 1470$, quod scribe infra 2100. Tandem $7 \times 7 \times 7 = 343$, quod scribi debet infra 1470. Addantur numeri 2100, 1470 & 343 & summa 3913 auferatur ex numero 4305, residuum est 392. Demittatur classis tertia 472, & duæ primæ partes radicis velut pars unica considerentur. Hæc autem pars quæ est 17, æquivalet 170 si conferatur cum tertia parte quæsita. Sumatur hujus numeri 170 triplum quadratum 86700, per quod dividatur pars cubi reliqua 392472, prodit quotus 4, quem scribe in radice; multiplicetur divisor 87700 per 4, productum fit 346800 quod infra scribitur. Dicas deinde $4 \times 4 = 16$; $16 \times 170 \times 3 = 8160$, quod productum scribe infra 346800, atque infra scribi debet cubus ipsius 4 nempe 64. Addantur tres illæ quantitates, quarum summa 355024 ex reliqua cubi parte subtrahatur, residuum fit 37448. Quare numerus propositus non est cubus perfectus; sed ad radicem proxime veram licebit accedere si residuo addantur tres cyphræ, ut in præsenti exemplo factum est; & eadem operatio deinde pro alio quolibet fractionum decimalium numero iteretur, magis ac magis accurata fiet radix inventa. Illud autem observandum est diligenter, inventas radicis partes velut partem unicam tractandas esse, si pars alia investigari debeat.

In extractione radicis quadratæ & cubicæ, diximus tot esse radicis partes quot sunt diversæ numeri propositi partes. Id vero demonstratione indiget. Quantitas quælibet ex duobus constans numeris unicam duntaxat in radice partem habere potest; consideretur numerus 99, omnium qui duobus constent notis maximus. Deinde radicem ex duabus notis compositam omnium minimam 10, consideremus; quadratum erit 100 quod numero 99 majus est, ac proinde radix duas notas continere non potest. Similiter quantitas omnium minima quæ tres habeat notas est 100, cujus radix quadrata est 10 quæ proinde duas continet notas; at quantitas omnium maxima quæ tres habeat notas est 999, cujus radix tres notas habere non potest; nam numerus omnium minimus tribus constans notis est 100, cujus quadratum fit 10000 quod quidem numerum 999 longe excedit. Eadem ratione ad aliam quamlibet numerorum seriem progrediendo facile intelligitur præscripta numerorum divisio in extrahenda radice quadrata, & huic numerorum divisioni partium numerum in radice respondere evidens est. Idem simili ratiocinatione constat pro radice cubica. Manifestum est extractionem radicum simili ratione perfici in numeris fractis, extrahendo scilicet radicem propositam ex numeratore & ex denominatore. In qualibet autem radicum extractione, operationis rite peractæ facile habetur argumentum. Si radix sit quadrata, hæc in se ipsam ducatur productoque addatur residuum, si aliquod fuerit, facta operatione restitui debet

ipse

ipse numerus propositus. Similiter radix cubica ad cubum evehatur; id vero statim patet ex ipsa earumdem operationum natura.

IV. Sæpe ab extrahenda radice supersedemus ubi veram invenire non licet, & quantitati propositæ præfigitur signum $\sqrt{}$ quod *radicale* appellant. Sic $\sqrt{3}$ significat radicem quadratam numeri 3; $\sqrt[3]{10}$, denotat radicem cubicam denarii; & hi sunt numeri quos arithmetici vocant numeros *surdos*, sive *irrationales*, aut etiam *incommensurabiles*. Quantitatibus litteralibus idem signum præfigitur: ita $\sqrt{ab}$, $\sqrt[3]{abc}$, significant radicem quadratam ipsius ab, & radicem cubicam quantitatis abc. Sed commoditatis ergo radix secunda vel quadrata exprimi solet per $\frac{1}{2}$, radix cubica per $\frac{1}{3}$, ita $a^{\frac{1}{2}}$, $a^{\frac{1}{3}}$, $a^{\frac{1}{m}}$, significat radicem quadratam, cubicam, & radicem quamlibet indeterminatam m. Ut autem clara talium expressionum notio habeatur, meminisse oportet quæ antea de exponentibus breviter dicta sunt.

Ponamus $a = b^2$, erit $a^{\frac{1}{2}} = (bb)^{\frac{1}{2}}$.

Præterea in quantitate $(bb)^3$ exponens 3 indicat quantitatem bb, ter scribendam esse, ac proinde $(bb)^3 = b^6$. Igitur eadem

dem ratione in quantitate $(bb)^{\frac{1}{2}}$, exponens $\frac{1}{2}$ designat litteram b, dimidio minus sumendam esse quam in bb, ac proinde semel tantum, quare $(bb)^{\frac{1}{2}} = b = a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$. Idem patet de aliis quibuscumque exponentibus. Res autem tota magis ac magis illustrabitur, explicatis quatuor arithmeticæ operationibus in quantitatibus surdis.

Quantitates surdæ adduntur vel subtrahuntur facillime, si ejusdem sint exponentis & eamdem habeant sub signo radicali quantitatem. Si autem res non ita se habeat, sæpissime contingit quantitates surdas ejusdem ordinis ad eamdem quantitatem sub signo radicali posse revocari. Ita si addi vel subtrahi debeant quantitates radicales $\sqrt{48abb}$, & $b\sqrt{75a}$, prima per reductionem mutatur in $4b\sqrt{3a}$, altera autem in $5b\sqrt{3a}$. Quare in 1 casu habebitur $9b\sqrt{3a}$, in altero autem $b\sqrt{3a}$. Totum reductionis artificium in eo consistit ut numeri sub signo radicali positi quærantur divisores, inter quos ille eligatur, si quis fuerit, ex quo liceat radicem extrahere ejusdem ordinis, cujus est surda quantitas. Si aliquem ejusmodi divisorem invenias, ejus radicem præfige signo radicali quo includatur tantummodo alter dati numeri coefficiens.

ciens. Si autem nullus talis divisor inveniri possit, jam quantitates radicales in additione signo + connectendæ, in subtractione autem signo − separandæ.

Demum multiplicantur & dividuntur quantitates irrationales non secus ac rationales, & producto vel quoto idem quod prius erat signum radicale præfigitur, quod quidem in utraque quantitate sit ejusdem ordinis. Ita si multiplicari debeant $\sqrt{ab} \times \sqrt{ac}$, productum erit $\sqrt{aabc} = a\sqrt{bc}$. Ita si dividi debeat $a\sqrt{bc}$ per $a\sqrt{b}$ erit $\frac{a\sqrt{bc}}{a\sqrt{b}} = \sqrt{c}$. Patet autem in multiplicatione delendum esse signum radicale, si æquales fuerint quantitates signo inclusæ; sic $\sqrt{a3\,c} \times \sqrt{a3\,c} = a3\,c$. Quoniam sæpe contingit quantitates radicales ad eundem exponentem reducendas esse, observandum est id facile præstari posse ex hactenus demonstratis; ita quantitates duæ radicales $\sqrt[2]{\frac{a}{b}}$, & $\sqrt[m]{\frac{c}{d}}$ mutantur in $\sqrt[nm]{\frac{a^m}{b^m}}$, & $\sqrt[nm]{\frac{c^n}{d^n}}$, quod patet; nam quantitates illæ ad potestates n, m, respective evehuntur & simul deprimuntur. Probe autem notandum est discrimen inter quantitatum multiplicationem illarumque potestatem. Ita si multiplicari debeat a3 per a2 productum fit a3 + a2 = a5. Si autem quantitas a3 ad secundam potestatem eve-

evehi debeat, habetur $x_2 = a^6$, & generatim quantitas a^m ad poteſtatem n eveĉta fit a^{mn}. Quare multiplicatio fit per *indicis* additionem, poteſtas autem per multiplicationem. Contraria ratione diviſio fit per *exponentis* ſubtraĉtionem, & radicis extraĉtio per exponentis diviſionem. Ita $\frac{a^6}{a^2} = a^{6-2} = a^4$. At ſi ex a^6 extrahenda ſit radix quadrata, erit $a^{\frac{6}{2}} = a^3$, & generatim pro diviſione $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$; at pro radicis n extraĉtione habetur $a^{\frac{m}{n}}$. Si quantitates ſint ſimplices, brevius per exponentes, quam per ſignum radicale exprimuntur.

V. Quantitates irrationales ſive incommenſurabiles ſæpe in hoc capite nominavimus; revera autem tales dari quantitates evidens eſt ex capite præcedenti, in quo demonſtravimus fraĉtionem ſive puram ſive mixtam in fraĉtionem ſemper abire, etiamſi ad poteſtatem quamlibet evehatur. Ergo numerus integer cujus radix quadrata, cubica &c. non eſt numerus integer, nullam fraĉtionem nequidem mixtam pro radice habere poteſt, ac proinde hujus numeri radix eſt incommenſurabilis. Itaque numeri incommenſurabiles non ſunt numeri proprie diĉti. Et nequidem ipſa, cum per numerum nihil aliud intelligamus, quam rationem quan-

quantitatis cujusvis ad aliam ejusdem generis quantitatem, in omni ratione vel numero existere necessum est partem aliquotam quæ sit utrique quantitati communis; at quantitates inter se incommensurabiles tali carent mensura: ita $\sqrt{2}$ non est numerus proprie dictus; talis quantitas proprie non exiſtit, eaque inveniri non poteſt. Imo fractiones proprie non dicuntur numeri niſi quatenus ad numeros integros revocantur.

Et quidem fractio $\frac{3}{4}$ quæ exprimit quartam partem totius alicujus ter ſumptam, ipſa ad numeros integros refertur; hæc enim quarta pars velut alia unitas conſideratur, ut antea obſervavimus. Totam incommenſurabilium doctrinam utiliſſimam quidem, alio arithmetico exemplo illuſtrabimus. Si ex numero 7 extrahenda proponatur radix quadrata, hæc invenitur minor quam 3; cum $3 \times 3 = 9$ & major quam 2, cum ſit $2 \times 2 = 4$. Igitur radix quadrata numeri 7 continetur intra limites 2 & 3, ac proinde ſi poſſet determinari, ea foret æqualis numero 2, & alicui numero fracto: ſed fieri non poteſt ut fractio mixta per ſeipſam multiplicata producat numerum integrum, ut antea demonſtravimus. Ergo numerus 7 pro radice habere non poteſt neque numerum integrum neque fractum. Idem patet de alio quolibet mumero integro cujus radix non eſt numerus integer.

Schol. Secundæ duntaxat & tertiæ poteſtatis compoſitionem ac reſolutionem in præ-

ſenti

ſenti capite explicavimus; at rem generatim & breviter, quantum licet, pro alia qualibet dignitate conſiderabimus. Ex hactenus explicatis manifeſtum eſt eodem modo formari altiores cujuslibet gradus poteſtates. Ita ad formandam quarti gradus poteſtatem multiplicari debet cubus per ſuam radicem & ſic deinceps. Jam in ſingulis terminis exponentes & coefficientes diligenter obſervemus. In poteſtatis cujuslibet compoſitione, primus terminus a, binomii cujuslibet, $a + b$, evehitur ad poteſtatem quæſitam V. G. a^2, ſi poteſtas ſecunda fuerit: in aliis ſequentibus terminis exponens quantitatis a, per unitatem decreſcit & in ultimo termino evaneſcit. Ita in ſecunda poteſtate habetur $2ab + b^2$. Contra autem poteſtas termini b, in primo termino non reperitur, ſed in 2 termino illius exponens eſt unitas, in 3 termino eſt 2, & ita creſcit per gradus, donec in ultimo termino exponenti poteſtatis quæſitæ æqualis fiat. Quare iiſdem gradibus, quibus decreſcunt exponentes ipſius a, creſcunt exponentes quantitatis b, atque in utraque quantitate exponentium ſumma ſemper eadem eſt, & poteſtatis quæſitæ exponenti æqualis; quod quidem in poteſtate qualibet experiri licet. Ita poteſtas 6^2 binomii $a + b$, invenitur $a^6 + ba^5 b + 15a^4 b^2 + 30a^3 b^3 + 15a^2 b^4 + 6ab^5 + b^6$, in qua obſervare eſt exponentes quantitatis a; decreſcere ſecundum ſeriem numerorum 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0; contrario autem ordine creſcere exponentes quantitatis b, nempe hoc modo 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, ſummaque exponen-

tium

tium in utroque termino est semper 6. Jam superest ut singulorum terminorum coefficientes observemus. Dividatur coefficiens praecedentis termini per exponentem ipsius b in termino dato, & quotum multiplica per exponentem ipsius a, in eodem termino, auctum unitate. Ita in praecedenti exemplo ubi termini sunt, a^6, $a^5 b$, $a^4 b^2$, $a^3 b^3$, $a^2 b^4$, ab^5, b^6, coefficiens primi termini est unitas, coefficiens secundi est $\frac{1}{1} \times \overline{5+1} = 6$, tertii termini coefficiens $\frac{6}{2} \times \overline{4+1} = 3 \times 5 = 15$. Coefficiens termini quarti est $\frac{15}{3} \times \overline{3+1} = 5 \times 4 = 20$. Et simili modo invenientur coefficientes alii 15, 6, 1.

Ex hac constanti exponentium & coefficientium serie, generatim exhiberi potest binomium $a + b$ ad potestatem quamlibet m, evectum. Ita terminorum series se habebit, non consideratis coefficientibus, a^m, $a^{m-1} b$, $a^{m-2} b^2$, $a^{m-3} b^3$, $a^{m-4} b^4$, quae seties continuari debet, donec exponens quantitatis b, evadat m. Coefficientes autem ex praecedenti regula hoc ordine progredientur

$$1,\ m,\ m \times \frac{m-1}{2},\ m \times \frac{m-1}{2} \frac{m-2}{3},$$

$$\frac{m \times m-1}{2} \times \frac{m-2}{3} \times \frac{m-3}{4},$$ & ita deinceps,

Qua-

Quare hæc habetur generalis formula $\overline{x \pm a}^{m} = x^{m} \pm \frac{m}{1} x^{m-1} a \pm \frac{m}{1} \times \frac{m-1}{2} \times x^{m-2} a^{2} \pm \frac{m}{1} \times \frac{m-1}{2} \pm \frac{m-2}{3} x^{m-3} a^{3}$ &c. Simili modo invenitur formula pro binomio $\overline{a - b}^{m}$, hoc solum discrimine quod terminus debeat esse negativus, si exponens quantitatis b, sit numerus impar. Ita in cubo $a^{3} - 3a^{2} b + 3ab^{2} - b^{3}$, secundus & quartus termini sunt negativi; ratio autem est evidens, cum negativa existente quantitate, multiplicationum numerus impar productum efficere debeat negativum. Formula eadem omnino ratione componi posset pro trinomio $a + b + c$, ponendo $a + b = a$, & ita deinceps pro polynomio quolibet. Præcedens formula quæ potestatum compositionem exhibet, earum quoque resolutionem repræsentare potest. Ita radix quadrata binomii $a \pm b$, nihil est aliud quam potestas binomii $a \pm b$, cujus exponens $\frac{1}{2}$. Quare ponatur in formula præcedenti $m = \frac{1}{2}$, habebiturque $\overline{a \pm b}^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}} \left(1 \pm \frac{b}{2a} - \frac{b^{2}}{8a^{2}} \pm \frac{b^{3}}{16a^{3}} \text{ \&c.} \right)$. Simili modo si extrahenda sit *radix* quinta ex

ex a + b habebitur $\overline{a + b}^{\frac{1}{5}} = a^{\frac{1}{5}} + \frac{1}{5}$
$a^{-\frac{4}{5}} b - \frac{1 \times 4}{2 \times 25} a^{-\frac{9}{5}} b^2$ &c $= a^{\frac{1}{5}} \times 1 +$
$\frac{b}{5a} - \frac{2bb}{25aa} +$ &c. Itaque ad radicem proxime veram accedere possumus per series infinitas, dummodo series illæ sint *convergentes*, hoc, est, si termini perpetuo decrescant.

CAPUT VI.

De proportionibus.

I. IN memoriam revocanda est explicata cap. 1 rationis & proportionis definitio. *Ratio* dicitur ea duarum quantitatum *habitudo*, qua ad se invicem referuntur; *geometrica* dicitur si in ea relatione consideremus quomodo quantitas una alteram contineat; *arithmetica* vocatur; si excessum tantummodo unius supra aliam spectemus. In omni ratione quantitas quæ ad aliam refertur, *antecedens* dicitur, ea vero ad quam refertur, *consequens* appellatur. Ratio geometrica dicitur *dupla*, *tripla*, *decupla* &c., si antecedens bis, ter, decies &c. consequentem continet; contra vero *subdupla*, *subtripla*, *subdecupla* &c., si bis, ter, decies &c. antecedens in consequenti continetur. *Exponens* rationis geometricæ dicitur quotus ex antecedenti per consequentem diviso;

viso ; exponens vero rationis arithmeticæ est differentia consequentis ab antecedenti. Hinc ratio geometrica ad instar fractionis scribitur, arithmetica ad instar subtractionis. Duarum rationum æqualitas *proportio* dicitur, *geometrica* vel *arithmetica* pro rationum ipsarum qualitate ; igitur in omni proportione quatuor quantitates esse debent, & *prima ad secundam esse* dicitur *ut tertia ad quartam*. Si vero eadem quantitas bis assumatur, ita ut primæ rationis consequens idem sit cum antecedente secundæ, proportio dicitur *continua*. Ita exprimi solet proportio geomettica a, b :: c, d, vel a : b $=$ c : d, vel $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, arithmetica vero a $-$ a $\div$ c $-$ d.

II. Si inter duas primas quantitates eadem sit differentia quæ inter duas ultimas, jam quantitates illæ sunt *arithmetice proportionales*, ut patet ex præcedenti definitione, quare arithmetice proportionales sunt numeri 3, 7, 12, 16; atque etiam quantitates a, a $+$ b, e, e $+$ b. Si autem talis proportio continuetur ita ut quantitates per eandem constantem differentiam perpetuo crescant vel decrescant, jam habetur series vel *progressio arithmetica*, qualis est ista a, a $+$ b, a $+$ 2b, a $+$ 3b &c., vel hæc alia x, x $-$ b, x $-$ 2b &c. aut etiam in numeris 1, 2, 3, 4, 5 &c., & 10, 7, 4, 1, $-$ 2 $-$ 5 $-$ 8 &c. Ex ipsa proportionis arithmeticæ natura evidens est summam extremorum terminorum æquaem esse summæ mediorum. Ita in propor-

tio-

tione arithmetica a, $a + b$, c, $c + b$, manifestum est summam extremorum $a + c + b$, æqualem esse summæ mediorum $a + b + c$. Hinc datis tribus quantitatibus facile invenitur quarta arithmetice proportionalis; addantur scilicet secunda & tertia, atque ex summa auferatur prima, differentia erit quartus terminus arithmetice proportionalis, ut patet.

Inde etiam colligitur in progressione qualibet arithmetica summam duorum extremorum æqualem esse summæ duorum quorumlibet terminorum ab extremis æque distantium. Sint priores termini, a $a + b$, $a + 2b$ &c., sitque ultimus terminus x, erit penultimus $x - b$, antepenultimus $x - 2b$ &c. Jam comparentur inter se termini qui ab extremis æque distant in hunc modum:

$$\begin{array}{l} a,\ a+b,\ a+2b,\ a+36,\ a+ab\ \&c. \\ x,\ x-b,\ x-2b,\ x-3b,\ x-4b\ \&c. \\ \hline a+x,\ a+x,\ a+x,\ a+x,\ a+x\ \&c. \end{array}$$

Si nempe singuli termini correspondentes, & qui ab extremis æqualiter distant sibi invicem addantur, habebitur semper $a + x$, hoc est, summa primi termini a, & ultimi x; atque hinc etiam evidens est summam omnium terminorum in progressione arithmetica æqualem esse producto ex summa primi & ultimi in dimidium terminorum numerum. Ita si numerus terminorum dicatur n, erit omnium summa $\overline{a+x} \times \frac{n}{2}$.

III. Cum differentia communis termino-

rum

rum in progressione arithmetica primum terminum non afficiat, patet hujus differentiæ coefficientem in quolibet dato termino æqualem esse numero terminorum qui terminum datum præcedunt. Quare in ultimo termino x, habebitur $\overline{n - 1} \times b$, nempe $x = a + \overline{n - 1} \times b$. Igitur cum omnium terminorum summa sit $\overline{a + x} \times \frac{n}{2}$, ea quoque invenitur $= \frac{2an + n^2 b - nb}{2}$ $= \left(a + \frac{\overline{nb - b}}{2}\right) \times n$. E. G. Series arithmetica $1 + 2 + 3 + 4 + 5$ &c. ad 100 terminos producta $= \frac{2 \times 100 + 10000 - 100}{2}$ $= 5050$. At si progressionis primus terminus fuerit o, erit progressionis summa æqualis dimidio producto ex ultimo termino in numerum terminorum. Nam in hoc casu cum sit $a = o$, summa terminorum quæ generatim exprimitur per $\overline{a + x} \times \frac{n}{2}$, in hanc abit $\frac{xn}{2}$. Unde evidens est summam numeri cujuslibet terminorum in progressione arithmetica cujus primus terminus est o, æqualem esse dimidio producto ex terminorum numero in terminum maximum. E. G. Progressio arithmetica.

o +

$$\frac{\begin{matrix} 0+1+2+3+4+5+6+7+8+9 = \\ 9+9+9+9+9+9+9+9+9+9 = \end{matrix}}{2}$$

$$\frac{10 \times 9}{2} = 45.$$

IV. Si quotus ex duabus primis quantitatibus æqualis ſit quoto ex duabus ultimis, quatuor illæ quantitates ſunt *geometrice proportionales*, ut patet ex præcedenti definitione. Tales ſunt numeri 2, 6, 4, 12, & quantitates a, ar, b, br. Ex ipſa proportionis geometricæ natura evidens eſt productum ex terminis extremis æquale eſſe producto ex mediis, ſic $a \times br = ar \times b$, ut patet. Quare datis tribus terminis facile invenitur quartus geometrice proportionalis, multiplicando ſcilicet duos medios terminos productumque dividendo per primum, quotus erit quartus terminus quæſitus; ita datis tribus quantitatibus a, ar, b, invenitur quarta $\frac{ar \times b}{2} = br$. At ſi proportio ſit continua, ita ut ſecunda quantitas ſit primæ rationis conſequens & ſimul ſecundæ rationis antecedens, ſimili ratiocinatione patet ſumendum eſſe hujus quantitatis quadratum, illudque per primam quantitatem eſſe dividendum. Hæc autem quantitas quæ antecedentis & conſequentis vices gerit, vocatur *media proportionalis*, taliſque proportio ita exprimi ſolet ∺ a, b, c, nempe hoc ſcribendi modo ſignificatur b, eſſe mediam proportionalem. At media proportionalis arithmetica ita deſignatur ÷ a, b, c, patet

tet autem in hac proportione summam extremorum æqualem esse termino medio bis sumpto.

Ex demonstratis de proportione geometrica pendet vulgatissima arithmeticæ operatio quæ *regula trium*, vel etiam *regula aurea* propter eximiam utilitatem appellari solet: per hanc regulam datis tribus terminis invenitur quartus proportionalis. In hac autem operatione probe observari debet terminorum ordo. Et primo quidem consideranda est quantitas quæ est ejusdem generis cum quantitate quæsita. Ex quæstionis natura intelligitur an quantitas data sit major vel minor quantitate quæsita; si major sit, jam maxima ex aliis duabus quantitatibus in terminorum ordine ad sinistram scribi debet: at si minor sit, tunc duarum aliarum quantitatum minima ad sinistram, alia autem ad dextram collocanda. Constituto autem convenienti terminorum ordine, jam ex præscripto regulæ, productum ex secundo termino in tertium per primum terminum dividi debet. Tota res exemplo perspicua fiet. Hæc proponatur quæstio: Si triginta operarii dierum 12 spatio opus aliquod absolvant, quæritur necessarius operariorum numerus ut idem opus 18 diebus absolvatur. Quoniam quæritur operariorum numerus; primum considerandus est numerus 30; statim autem vides numerum illum datum majorem esse numero quæsito; quare numerus 18 ad sinistram collocari debet, numerus autem 12 ad dextram, atque ita operatio peragitur, hoc ordine.

$$18 : 30 = 12 : \frac{30 \times 12}{18} = 20.$$

V. Pro varia terminorum ordinatione in proportione geometrica, diversa ab arithmeticis inventa fuerunt nomina. At ex prima terminorum ordinatione, aliæ omnes facile inferuntur. Si primus terminus dicatur esse ad tertium ut secundus ad quartum, argumentari dicimur *alternando*. Si dicatur secundus ad primum ut quartus ad tertium, tunc dicimur *invertendo*. Si summa terminorum primi & secundi refertur ad secundum ut summa terminorum tertii & quarti ad quartum, inferre dicimur *componendo*; contra autem *dividendo*, si terminorum primi & secundi differentia ad secundum referatur ut differentia tertii & quarti refertur ad quartum. In his autem omnibus argumentandi modis proportionem manere patet, cum productum extremorum æquale semper inveniatur producto mediorum. Ex eadem productorum æqualitate facile colligitur, rationum compositione proportionem non mutari. Ratio *composita* ex pluribus geometricis rationibus illa dicitur quam habet productum ex earum antecedentibus ad productum ex consequentibus. Sint duæ proportiones

$$a : b = c : d, \text{ erit } af : bg = cm : ds,$$
$$f : g = m : s$$

Etenim productum extremorum afds æquale est producto mediorum bgcm. Et quidem $a : b = c : d$, ac proinde $ad = bc$. Præterea $f : g = m : s$, ideoque $fs = gm$; ergo $ad \times fs = bc \times gm$. Simili ratione patet ad

$\frac{ad}{fs} = \frac{bc}{gm}$. Atque eadem valet demonstratio pro alio quolibet proportionum numero: ratio ex duabus æqualibus composita dicitur *duplicata*, ex tribus *triplicata* &c. Hinc ratio geometrica quam habet quadratum unius quantitatis ad quadratum alterius est duplicata ejus, quam habent ipsæ quantitates ad invicem, ratio cuborum triplicata &c. Et contra ratio quam habent inter se radices quadratæ, cubicæ &c. dicitur *subduplicata*, *subtriplicata* &c. rationis potentiarum *respectivarum*. At ratio quæ intercedit inter radices quadratas cuborum, hoc est,

ratio $a^{\frac{3}{2}}$ & $b^{\frac{3}{2}}$ dicitur *sesquiplicata*.

Si duæ quantitates ita inter se connexæ sint ut si una dupla, tripla &c., altera etiam dupla, tripla &c. evadat, prima dicitur esse in *ratione directa simplici* alterius. At si prima in eadem ratione decrescit in qua altera augetur, tunc illa esse dicitur in *ratione inversa*, sive *reciproca* istius. Verum si duæ quantitates ita sint invicem connexæ, ut altera crescat in eadem ratione qua primæ quadratum aut cubus &c. tunc illa ad hanc esse dicitur in ratione duplicata, triplicata &c. At si in eadem ratione una decrescit qua crescunt alterius quadrata vel cubi, dicetur esse in ratione hujus *reciproca* duplicata aut triplicata &c.

VI. Ex mediorum & extremorum producto pendet etiam universa progressionum geo-

geometricarum doctrina. In progressione qualibet geometrica productum ex primo in ultimum terminum semper æquale est producto ex secundo & penultimo, aut etiam alteri cuilibet producto ex duobus terminis a primo & ultimo æqualiter distantibus. Sit progressio a, ar, ar^2, ar^3, in qua communis multiplicator aut divisor *ratio communis* dici solet, sitque y, ultimus terminus, erunt quatuor ultimi termini y, $\frac{y}{r}$, $\frac{y}{r^2}$, $\frac{y}{r^3}$, ut patet ex natura progressionis geometricæ. Est autem

$$a \times y = ar \times \frac{y}{r} = ar^2 \times \frac{y}{r^2} = \frac{ar^3 \times y}{r^3} \ \&c.$$

Præterea summa progressionis geometricæ, dempto primo termino, æqualis est summæ omnium terminorum, dempto ultimo, per communem rationem multiplicatæ. Nam ar

$$\times ar^2 \times ar^3 \times \&c. \frac{xy}{r^3} \times \frac{y}{r^2} \times \frac{y}{r^3} \times y =$$

$$r \times (a \times ar \times ar^2 \ \&c. \times \frac{y}{r^4} \times \frac{y}{r^3} \times \frac{y}{r^2} \times \frac{y}{r}).$$ Quare

si progressionis summa dicatur s, erit $s - a = \overline{s - y} \times r$ hoc est, $s - a = sr - yr$, vel $rs - s = yr - a$, & $s = \frac{yr - a}{r - 1}$. Quamvis autem ex arithmeticarum operationum natura facile pateat qua ratione ad hunc ultimum valorem perveniatur, res tamen ma-

gis fiet manifesta ex appendice, quam de æquationibus mox adjungemus. Porro cum exponens ipsius r, post secundum terminum perpetuo crescat, si numerus terminorum dicatur n, erit n − 1 exponens ipsius r, in ultimo termino, ac proinde $y = ar^{n-1}$, & $yr = ar^{1} \cdot \chi^{1} = ar^{n}$, & $s = \frac{yr - a}{r - 1} = \frac{ar^{n} - a}{r - 1}$.

Quare datis in progressione geometrica primo termino, terminorum numero & communi ratione, facile invenietur omnium terminorum summa. Si invenienda sit summa seriei decrescentis $y \chi \frac{y}{r} \chi \frac{y}{r^{2}} \chi \frac{y}{r^{3}}$ &c. $\chi\ ar^{3}\ \chi\ ar^{2}\ \chi\ ar\ \chi\ a$, posito terminorum numero infinito, ultimus terminus a, fit $= 0$. Cum enim n sit infinitus, ac proinde & r^{n-1} erit $a = \frac{y}{r^{n-1}} = 0$. Quare summa talis seriei $s = \frac{yr}{r - 1}$, quæ est summa finita, quamvis numerus terminorum sit infinitus; ita series infinita $1\ \chi\ \frac{1}{2}\ \chi\ \frac{1}{4}\ \chi\ \frac{1}{8}\ \chi\ \frac{1}{16}$ &c. $= 2$.

Schol. Ad progressiones arithmeticas & geometricas refertur logarithmorum doctrina, maximæ quidem utilitatis in universa mathesi, sed rem breviter attingere nobis satis erit.

erit. Progressio quælibet geometrica hac formula potest repræsentari ∺ aq^0, aq^1, aq^2, aq^3, aq^4, aq^5 &c. in qua a, & q, exprimunt numeros quoslibet: Quare si fiat $a = 1$, præcedens series abit in hanc ∺ q^0, p^1, q^2, q^3, q^4, q^5 &c. Inde autem duo colliguntur. 1. Productum ex duobus quibuscumque hujus progressionis terminis, pro exponente habet ipsorum exponentium summam. Ita productum ex $q^3 \times q^4 = q^7$. Quare si inveniendus proponatur in hac progressione terminus qui sit duorum aliorum producto æqualis, quæratur terminus cujus exponens est ipsa duorum exponentium summa.... 2. Quotus ex duobus terminis emergens, ipse est terminus cujus exponens est ipsa exponentium differentia. Ita si dividatur q^5 per q^3, quotur est q^{5-3}. Quare si inveniendus proponatur terminus duorum aliorum quoto æqualis, quæratur terminus cujus exponens æqualis est exponentium differentiæ.

Si ponatur progressionis geometricæ terminus aliquis q, atque exponens rationis sit $\frac{1}{n}$, progressio quælibet geometrica hac serie in infinitum repræsentari potest... qn^{-5}, qn^{-4}, qn^{-3}, qn^{-2}, q^{-1}, q, qn, qn^2, qn^3, qn^4, qn^5, &c. ut patet. Si infra progressionem geometricam scribatur progressio arithmetica, ita ut singuli termini unius respondeant singulis terminis alterius, terminus quilibet progressionis arithmeticæ appellatur *logarithmus* termini respondentis in progressione geometrica. Inde autem patet mul-

tipliciter variari posse logarithmorum formam. Etenim si duæ sint progressiones, quarum altera geometrica sit, altera arithmetica, & sub singulis primæ terminis singuli secundæ scribantur, undecumque initium fiat; hi dicuntur illorum *logarithmi*: at in vulgari logarithmorum systemate, numeri alicujus logarithmus vocatur exponens potestatis numeri denarii qui sit numero dato æqualis; ita si habeatur progressio geometrica ∺ 10^0, 10^1, 10^2, 10^3, 10^4, & infra scribantur eorumdem terminorum valores ∺ 1, 10, 100, 1000, 10000 &c. exponens 0 est logarithmus unitatis, exponens 1 est logarithmus numeri 10, & ita deinceps. At quia exponentes illi exhibent duntaxat logarithmos numerorum integrorum in progressione decupla 1, 10, 100, 1000 &c., necessum est præterea haberi logarithmos numerorum intermediorum 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11, 12 &c. Qua ratione autem formari possint logarithmorum tabulæ breviter exponam; neque enim doctrinam hanc fusius explicare licet pro injuncta his elementis facilitate.

Ut habeatur numeri alicujus dati E. G. 3 logarithmus, oportet numerum hunc inveniri in progressione geometrica 1, 10, 100 &c. quod ex dictis patet. Porro quamvis non pateat numerum 3 locum habere posse in prædicta progressione, evidens tamen est, inserendo inter 1 & 10, terminos medios geometrice proportionales, obtineri numeros inter 1 & 10 eo proximius, quo major est terminorum numerus, unde fiet ut horum terminorum mediorum aliquis vel

sit

sit numerus 3 accurate, vel inveniantur termini duo contigui, inter quos numerus 3 contineatur proxime. His positis, inter o & 1, inseruntur tot medii arithmetice proportionales quot medii geometrici inseruntur inter 1 & 10. Quo facto, sumetur pro logarithmo numeri 3, terminus progressionis arithmeticæ respondens termino jam invento in progressione geometrica. Hoc artificio & patientissimo multorum annorum labore supputatæ sunt logarithmorum tabulæ.

Commodissimæ sane sunt tabulæ illæ; etenim cum demonstratum sit productum ex duobus numeris logarithmorum summæ respondere, eorum vero differentiæ respondere numerorum quotum, per solam additionem & subtractionem compendiose absolvi possunt multiplicatio & divisio. Sumantur datorum numerorum logarithmi simulque addantur, numerus summæ respondens in logarithmorum tabulis erit logarithmus producti; contra autem logarithmorum differentia erit logarithmus quoti, ac proinde inveniuntur numeri quæsiti. Simili ratione patet numerum quemlibet ad datam potestatem evehi, si toties sumatur numeri dati logarithmus, quoties per se ipsum numerus multiplicandus proponitur, hoc est logarithmus per exponentem potestatis multiplicari debet, & productum erit quæsiti numeri logarithmus; contra autem si numeri dati logarithmus per exponentem radicis dividatur, quotus erit quæsitus radicis logarithmus.

APPENDIX

De Æquationibus.

I. Æ*Quatio* dicitur propositio duarum quantitatum æqualitatem affirmans, interposito æqualitatis signo $=$. Æquatio valorem quantitatis alicujus repræsentat, si ex una æquationis parte habeatur quantitas sola quæsita; in parte autem altera occurrant quantitates quæ omnes sint cognitæ. Ita si habeatur $x = \frac{4 \times 6}{2} = 8$, notus est valor ipsius x. Itaque in omni æquatione resolvenda id curandum est, ut nempe quantitas, cujus valor quæritur, in una æquationis parte sola contineatur, pars autem altera solas quantitates cognitas contineat. In hac autem appendice duplex duntaxat æquationum genus considerabimus, eas scilicet in quibus quantitas incognita vel unius est dimensionis seu primi gradus, vel ad secundam dimensionem seu secundum gradum evehitur. Quod primi gradus æquationes spectat, totum artificium regulis quibusdam explicabimus variisque numeris distinguemus.... 1. Ex una æquationis parte in alteram transfertur quantitas aliqua, facta signorum permutatione, ut in hoc exemplo. $5x + 50 = 4x + 56$, $5x - 4x = 56 - 50$ & $x = 6$.... 2. Si quantitas incognita quantitatibus aliis per multiplicationem aut divisionem permixta sit ab iis liberari debet in primo casu per divi-

visionem, in casu altero per multiplicationem. Sit $3x + 12 = 27$, erit $3x = 27 - 12$. & $x = \frac{15}{3} = 5$. Si autem $\frac{x}{5} + 4 = 10$, erit $x + 20 = 50$, & $x = 50 - 20 = 30$.... 3. Proportio quælibet geometrica converti potest in æquationem, facta extremorum & mediorum multiplicatione. Sit $12x : \frac{1}{2} = 4 : 1$, erit $12x = 2$, & $x = \frac{2}{12} = \frac{1}{9}$. Simili ratione proportio arithmetica in æquationem per additionem mutari potest... 4. Loco quantitatis cujuslibet in æquatione, alia ejusdem valoris substitui potest. Sit $3x + y = 24$, & $y = 9$, erit $3x = 24 - 9 = 15$, & $x = \frac{15}{3} = 5$.... 5. Si pars æquationis quantitatem quæsitam continens, signo aliquo radicali afficiatur, delendum est signum radicale, & altera pars æquationis ad eam evehi debet potestatem, quam indicat ipsum signum radicale. Sit $\sqrt{ax + b^2} - c = d$, erit $\sqrt{ax + b^2} = c + d$, & $ax + b^2 = d^2 + 2cd + c^2$, quare $x = \frac{d^2 + 2cd + c^2 - b^2}{a}$

II His præmissis permutationum regulis quæ ex antea demonstratis facile intelliguntur, jam problema aliquod unius dimensionis solvendum proponemus. Et primo quidem quæstionis propositæ distincta habeatur no-

notio & singulæ conditiones attente considerentur. Si alicujus problematis conditiones ita exprimantur ut tot habeantur incognitæ quot æquationes, poterit semper deveniri ad unicam æquationem quæ unicam incognitam habeat. Nam sint E. G. 10 ęquationes & totidem incognitæ, poterit, conferendo primam cum secunda, eliminari per regulas præscriptas una ex iis incognitis, inveniendo novam æquationem quæ illa careat; tum idem pręstari poterit conferendo primam cum tertia & ita porro, ac habebuntur jam novem æquationes cum novem incognitis, quę eodem artificio ad octo reduci poterunt cum octo incognitis, & ita porro, donec perveniatur ad unicam æquationem cum unica incognita. Hinc si habeantur tot æquationes quot incognitæ, problema dicitur *determinatum*, & unicam vel finitas numero solutiones admittit. Si fuerint plures incognitæ quam æquationes, prolema dicitur *indeterminatum* & solutiones habet infinitas. Æquatio $3x + \frac{1}{4}x = 20$, est æquatio determinata, sed $x + y = 12$, est indeterminata; etenim si ponatur $x = 1$ & $y = 11$, vel $x = 2$, & $y = 10$, & ita porro, semper invenietur $x + y = 12$, ita ut infiniti sint valores qui pro x & y positi numerum datum restituant. Regulas hactenus explicatas ad facile exemplum transferamus. Mercator quidam nummos quotannis triente adauget, demptis 100 nummis quos annuatim impendit in sumptus, & post tres annos fit duplo ditior, quæruntur nummi. In hoc problemate

te plures latent conditiones sic evolvendæ, & enuntiandæ. Quantitates incognitæ ultimis alphabeti litteris designari solent. Itaque mercator habet certam nummorum summam, quæ dicatur x. Anno primo expendit nummos 100. Quare residuum, $x - 100$. Quod adauget triente, ideoque habetur $x - 100 + \frac{x - 100}{3} = \frac{4x - 400}{3}$. Anno secundo expendit nummos 100, quare residuum $\frac{4x - 400}{3} - 100 = \frac{4x - 700}{3}$, quod adauget triente, ideoque fit $\frac{4x - 700}{3} + \frac{4x - 700}{9} = \frac{16x - 2800}{9}$

Anno tertio expendit nummos 100, ideoque residuum $\frac{16x - 2800}{9} - 100 = \frac{16x - 3700}{9}$ quod adauget triente; quare fit $\frac{16x\ 3700}{9}\ \frac{16x\ 3700}{27}$ $= \frac{64x\ 14800}{27}$. Tandem post tres annos fit duplo ditior; ergo $\frac{64x\ 14800}{27} = 2x$; ex hac æquatione fit $64x - 14800 = 54x$, atque $x = 1480$. Quare habentur nummi in ipso initio atque etiam lucrum.

III. Si in aliquo solvendo problemate perveniatur ad æquationem quæ ipsum quanti-

tatis incognitæ quadratum, & præterea productum ex ipsa quantitate incognita in aliquam datam quantitatem involvat, hæc æquatio dicitur *secundi gradus*, vel *quadratica*. In talibus autem æquationibus hac regula utendum est. Singulos æquationis terminos quæ incognitam quantitatem continent ad unam partem transferas, ita ut singuli termini cogniti ex parte altera maneant. Si quantitatis incognitæ quadratum coefficiente aliquo afficiatur, per hunc coefficientem singuli æquationis termini dividantur. Tandem dimidii coefficientis quantitati incognitæ præfixi sumatur quadratum, quod ex utraque parte addatur. Jam pars æquationis quæ incognitam quantitatem continet ad perfectum quadratum reducta habebitur, ex qua proinde radix quadrata extrahi poterit, & deinde per regulas præscriptas, quantitatis incognitæ valor eruetur. Ponamus $y^2 + ay = b^2$, addatur hinc & inde quadratum dimidii ceofficientis a, erit $y^2 + ay + \frac{1}{4}a^2 = b^2 + \frac{1}{4}a^2$, extractaque radice fiet $y + \frac{a}{2} = \pm\sqrt{b^2 + \frac{1}{4}a^2}$, & tandem $y = \pm\sqrt{b^2 + \frac{1}{4}a^2} - \frac{a}{2}$. Diligenter observandum est radici quadratæ præfixum fuisse signum $\pm$ hoc est, $+$ vel $-$. Etenim radix quadrata cujuslibet quantitatis ut a^2, potest esse $+a$, vel $-a$, ideoque

que $y + \frac{a}{2} = +\sqrt{b^2 + \frac{1}{4}a^2}$, vel $-\sqrt{b^2 + \frac{a^2}{4}}$; cum $-\sqrt{b^2 + \frac{a^2}{4}} \times -\sqrt{b^2 + \frac{a^2}{4}}$, restituat quadratum $b^2 + \frac{a^2}{4}$ non secus ac facit $+\sqrt{b^2 + \frac{a^2}{4}} \times + \sqrt{b^2 + \frac{a^2}{4}}$. Quare æquationes quadraticæ duas admittunt solutiones. Sic in præsenti exemplo duo sunt valores radicis y, unus nempe $y = +\sqrt{b^2 + \frac{a^2}{4}} - \frac{a}{2}$; alter autem $y = -\sqrt{b^2 + \frac{a^2}{4}} - \frac{a}{2}$. At quoniam positiva sunt omnium quantitatum quadrata, hinc patet quantitatis negativæ radicem esse impossibilem seu assignari non posse, quæ ideo dicitur *imaginaria*. Aliquando contingit æquationes nullam solutionem admittere. Exemplo sit $y^2 - ay + 3a^2 = 0$; erit $y^2 - ay = -3a^2$, & $y^2 - ay + \frac{a^2}{4} = -3a^2 + \frac{a^2}{4} = -\frac{11a^2}{4}$, extractaque radice, habebitur $y - \frac{a}{2} = \pm\sqrt{-\frac{11a^2}{4}}$, & $y = \frac{a}{2} \pm \sqrt{-\frac{11a^2}{4}}$. Ex quibus manifestum est duos valores radicis y esse imaginarios, cum assignari non possit radix quantitatis $-\frac{11a^2}{4}$.

Si ergo in solutione problematum deveniatur ad quantitates imaginarias, signum est

ad

admodum manifestum vel problema esse impossibile, vel adhibitam esse methodum, quæ aliquid impossibile involvit, prorsus ut fit in argumentatione dum res ad absurdum reducitur.

IV. Radices imaginariæ quæ eamdem sub signo radicali quantitatem habent ut $\sqrt{-a}$, $-\sqrt{-a}$, per multiplicationem efficere possunt productum reale in quo nullum supersit signum radicale, dummodo radices illæ numero pari semper multiplicentur. Etenim evanescere non potest signum radicale, nisi terminus hoc signo affectus multiplicetur per alium terminum, qui idem signum radicale habeat & eandem quantitatem signo inclusam. Jam vero ita sublato signo radicali; si productum ex prima multiplicatione per idem signum radicale multiplicetur, novum productum afficietur quoque signo radicali; at si rursus multiplicetur per idem signum radicale, iterum evanescet signum radicale, & ita deinceps. Si polynomii terminus aliquis contineat radicem imaginariam, quale est polynomium $x - a - \sqrt{-b}$, evanescere non potest signum radicale, nisi polynomium datum multiplicetur per aliud, quod a primo differat tantum quoad signum vinculo radicali præfixum. Ita in polynomio proposito solum productum ex $x - a - \sqrt{-b}$ in $x - a + \sqrt{-b}$ delere potest signum radicale, factaque multiplicatione habetur $xx - 2ax + aa + b$; in hoc enim solo casu producta singula ex unoquoque termino reali in $\sqrt{-b}$, sese

ſeſe mutuo ſignis contrariis elidunt, atque hinc patet terminum b, qui continet productum ex duobus radicalibus $+\sqrt{-b} \times -\sqrt{-b}$, eſſe neceſſario poſitivum Itaque quantitatum imaginariarum frequens uſus occurrere poteſt; ipſa enim impoſſibilitas non ſolum per multiplicationem aliquando tollitur, ſed etiam ſumma binarum quantitatum, quæ ex realibus & imaginariis ſunt mixtæ, realis eſſe poteſt; ita quantitatum $3+\sqrt{-1}$ & $8-\sqrt{-1}$, ſumma eſt realis, nimirum 11, atque etiam realis eſt differentia nempe 5. Patet autem æquationes omnes ſecundi gradus poſſe repræſentari per hanc formulam $x2 - px = q$, in qua p, q, deſignant quantitates quaslibet vel poſitivas, vel negativas.

Æquationum quadraticarum doctrinam facili exemplo illuſtrabimus. Itaque hoc ſit problema, invenire ſcilicet in linea duo quęcumque luminaria conjungente punctum tale, ut luminaria illa ex hoc puncto æquali luce fulgeant. Diſtantia inter duo luminaria dicatur a, ſitque illuminationis ratio ut m ad n; præterea dicatur x diſtantia minoris luminaris a puncto quæſito, erit diſtantia luminaris alterius ab eodem puncto $a - x$. Jam ponatur luminarium effectus ſeu lucis intenſitatem eſſe in ratione reciproca duplicata diſtantiarum a puncto lucido, ut vulgo ſtatuitur a Phyſicis; ſumptis diſtantiarum quadratis, erunt intenſitates lucis ut $\frac{1}{xx}$ &

— Res

$\frac{1}{xx - 2ax + aa}$. Res ita se haberet si æqualia forent luminaria; at quia (ex hypoth.) lucis quantitates absolutæ sunt ut m ad n, erunt luminarium effectus ut $\frac{m}{xx}$ ad $\frac{n}{xx - 2ax + aa}$. Itaque ut habeatur punctum quæsitum, instituenda est æquatio inter $\frac{m}{xx}$ & $\frac{n}{xx - 2ax + aa}$, ex qua, per reductionum regulas, eruitur $xx + \frac{2amx}{n-m} = \frac{aam}{n-m}$, & addito, ut moris est, dimidii coefficientis quadrato, habetur $x^2 + \frac{2amx}{n-m} + \frac{aamm}{\overline{n-m}^2} = \frac{aam}{n-m} + \frac{aamm}{\overline{n-m}^2}$. Hujus æquationis radices duæ sequenti formula exprimuntur, ut patet, nempe $x = -\frac{am}{n-m} \pm \frac{a}{n-m}\sqrt{mn}$, vel $x = \frac{a}{n-m} \times \overline{-m \pm \sqrt{mn}}$.

Ex his evidens est unius radicis valorem esse negativum, alterius autem positivum. Etenim si quantitas radicalis signo $-$ afficiatur, jam quantitas tota fit negativa; si autem afficiatur signo positivo $+$, jam quantitas $-m + \sqrt{mn}$ erit positiva, cum sit (ex hypoth.) n major quam m, ideoque

que $\sqrt{mn}$, major quam m.

Supereſt ut radicis negativæ uſum explicemus. In memoriam revocanda ſunt, quæ de quantitatibus negativis jam dicta ſunt; ſcilicet quantitates negativas ſecundum directionem poſitivis oppoſitam ſumendas eſſe. In præſenti problemate quantitatis x valor negativus facile intelligetur, ſi obſervemus punctum quæſitum a nobis conſiderati tanquam inter duo luminaria conſtitutum. At ſi attendatur ad alterius caſus poſſibilitatem, ponendo nempe punctum quæſitum in linea producta ultra luminaria, jam valor radicis prodit poſitivus. Et quidem ſi diſtantia puncti a minori luminari dicatur x; ut ante, erit luminaris majoris diſtantia, $a + x$; quadrata autem diſtantiarum erunt xx & $aa + 2ax + xx$, quæ per conditiones problematis in æquationem reducta præbent $maa + 2amx + mxx = nxx$; reſoluta æquatione habetur $x = \frac{a \times \overline{m + \sqrt{mn}}}{n - m}$; valor $\frac{a \times \overline{m + \sqrt{mn}}}{n - m}$ erit poſitivus, hicque ſolus problemati ſatisfacit in caſu propoſito. Alter autem valor negativus $\frac{a \times \overline{m \; \sqrt{mn}}}{n - m}$ ſignificat ſumendam eſſe directionem oppoſitam, punctumque non in linea producta ultra luminaria, ſed in ipſa linea jungente conſtituendum eſſe. Problema ad caſum particu-

ticularem transferamus. Ponatur $n = 4m$, præcedens formula $x = \frac{a}{n-m} \times \overline{-m \pm \sqrt{mn}}$ in hanc abit $x = \frac{a}{3} \times \overline{\pm 2 - 1}$. Quare duplex valor radicis x erit $+ \frac{1}{3}a$ & $- a$, qui quidem duo valores determinant puncta duo, quæ problemati æque satisfaciunt. Punctum unum locatur inter duo luminaria, illiusque distantia a lumine vividiori duplo major erit quam a debiliori. Punctum alterum constituetur in linea producta, illiusque a lumine debiliori distantia æqualis erit ipsi luminarium distantiæ. Facile autem sine ullo Algebræ auxilio intelligitur utrumque punctum problemati satisfacere; cum duo illa puncta lumini debiliori duplo proximiora sint, quam vividiori quæ vim habet quadruplo majorem. Hoc exemplo illustrantur quæ de quantitatibus negativis breviter antea attigimus. Hæc sunt Arithmeticæ & Algebræ elementa, brevissima quidem, sed tamen rerum varietate copiosa, quantum ad nostras institutiones physicas satis esse judicavimus.

F I N I S.

ELE-

ELEMENTA GEOMETRIÆ

PROOEMIUM.

De definitione & divisione Geometriæ.

1. GEometria est ſcientia magnitudinum, *ſolidorum* nempe, *ſuperficierum* & *linearum*. Solidum eſt magnitudo in longum latum & profundum extenſa. Quamvis autem nihil ſit in rerum natura continuum quod tres illas dimenſiones ſimul non habeat, illę tamen ſeorſim conſiderari poſſunt, vel etiam duas tantum concipere poſſumus de tertia minime cogitantes; atque hinc intelligitur notio ſuperficiei & lineæ. Superficies eſt magnitudo tantum in longum & latum extenſa. Linea autem eſt magnitudo extenſa tantum in longum. Et re quidem ipſa, itineris longitudinem nobis repræſentamus, non attenta ejus latitudine, & planitiei latitudinem intelligimus, terrarum profunditatem nequaquam conſiderantes. Denique ſi concipiamus lineæ terminum, cujus nulla pars ſit, nulla extenſio, jam terminus ille *punctum* dicitur. Itaque ad explicandam Tironibus Geometriæ definitionem, id primum oſtendi debet, quomodo per varios abſtractionum gradus ex corporis *phyſici*,

&

& prout est in se, consideratione, ad corporis *geometrici* & simpliciter extensi contemplationem perveniamus, ac deinde ad superficiei & lineæ notionem progrediamur, atque tandem notionem puncti formemus. Neque methodo satis philosophica utuntur qui statim superficiem definiunt terminum solidi, lineam terminum superficiei, & punctum terminum lineæ. Ex præcedenti definitione nascitur divisio geometriæ in geometriam linearum, superficierum & solidorum. Quare tres erunt geometriæ sectiones, 1. De lineis. 2. De superficiebus. 3. De solidis. In prima sectione linearum positionem illarumque mutuam relationem expendemus. Porro linearum nomine non solum intelligimus lineam rectam, sed etiam lineam circularem, cujus utilitas est maxima in consideranda linearum rectarum mutua positione. Quare ad geometriæ elementa pertinent quoque circuli proprietates. In secunda autem sectione superficierum proprietates & mensuram considerabimus. In tertia tandem sectione proprietates solidorum, illorumque mensuram demonstrabimus. At recta methodus postulat ut rerum demonstrandarum varietatem in unaquaque sectione variis capitibus distinguamus.

II. Lineam repræsentare solent Geometræ tanquam genitam motu puncti. Si punctum directionem non mutat, linea hoc motu descripta *recta* dicitur; *curva* autem appellatur, si punctum perpetuo mutet directionem. At fatendum est, ita simplicem esse rectæ & curvæ notionem, ut ad clariorem ideam magisque *elementarem* reduci vix pos-

possit. Rectam definiunt alii lineam omnium inter duos terminos ductarum brevissimam. Cæterum inde evidens est datis in linea recta punctis duobus, datam esse hujus lineæ positionem, ita ut unica duntaxat recta per hæc duo puncta transire possit. Ex his etiam intelligitur quid sit superficies plana, omnium superficierum eosdem terminos habentium brevissima, vel cui linea recta undequaque adaptari potest. Circulus definitur figura plana, unica curva linea comprehensa, quæ *peripheria* dicitur, sive *circumferentia*, ad quam omnes rectæ lineæ a puncto medio, quod *centrum* dicitur, ductæ, æquales sunt inter se; circumferentiæ pars quælibet *arcus* vocatur. Linea recta per centrum ducta & utrinque terminata, *diameter* dicitur; rectæ autem a centro ad circumferentiam ductæ, *semidiametri* vel *radii* appellantur.

III. *Anguli* notio ope circuli facillime concipitur Duæ lineæ rectæ in aliquo puncto concurrentes angulum efficere dicuntur. Angulorum mensura est arcus, quem ipsorum latera comprehendunt in peripheria circuli ex anguli vertice tanquam centro descripti. Porro dum dicitur anguli mensuram esse arcum circuli, nihil aliud significatur nisi æquales esse angulos, si æquales sint arcus ex angulorum vertice & eodem radio descripti Ita dum dicitur angulum esse alterius duplum, nihil aliud intelligitur nisi arcum unum altero esse duplo majorem. Itaque anguli natura in majori aut minori inclinatione unius lineæ ad aliam consistit. Igitur angulus cum sit mera linearum incli-

natio

natio & *apertura*, extensio vel quantitas proprie loquendo dici non potest; ac proinde, abstractione facta ab omni extensionis consideratione, angulum alterius duplum dicere non possumus, cum id dici possit duntaxat de quantitate comparata cum alia quantitate homogenea. Quia vero mera linearum apertura partes non habet, angulus non est quantitas proprie dicta, atque hinc factum est ut anguli mensuram cum circuli arcu comparaverint Geometræ. Circulus dividi solet in partes æquales 360, quæ *gradus* dicuntur; singuli gradus dividuntur in 60 minuta prima, quodlibet minutum primum dividimus in 60 secunda, & sic in infinitum. Gradus per o designari solent, minuta autem per lineolas numeris superimpositas. Ita si forte occurrant 35°, 25' 36" 42"', lege 35 gradus, 25 minuta prima, 36 secunda, 42 tertia.

IV. Ex angulorum notione pendet linearum mutua positio. Linea dicitur alteri lineæ *perpendicularis*, quando in ipsam incidens facit angulos hinc & inde æquales, angulus hujusmodi dicitur *rectus*. At si recta una super alteram cadens duos angulos efficiat ita ut unus sit recto major, alter autem minor, primus dicitur *obtusus*, alius autem *acutus*. Si talis sit rectarum positio ut eandem semper a se invicem servent distantiam; evidens est nullam esse linearum illarum mutuam inclinationem, ac proinde in infinitum etiam protractæ non concurrent seu angulum non efficient; tales lineæ dicuntur *parallelæ*.

V. Ex lineæ rectæ definitione evidens est, duas

duas lineas rectas in unico duntaxat puncto concurrere posse; cum enim omni careant latitudine, communis intersectio in unico tantum puncto fieri potest. Neque ad aliam deinde intersectionem transire possunt; alterutra enim linea directionem mutaret, ac proinde non forent ambæ rectæ, quod est contra hyp. Id pro axiomate habent Geometræ & ita exprimi solet: *Duæ lineæ rectæ segmentum commune habere, nec spatium claudere possunt*. Itaque tres saltem lineæ requiruntur ut spatium undique claudatur; spatium undique clausum *figura* dicitur. *Triangulum* est figura terminata tribus lineis, quæ ejusdem latera vocantur. Hæc autem latera si fuerint æqualia, triangulum dicitur *æquilaterum*; si duo tantum latera sint æqualia, triangulum vocatur *isosceles*. Demum si latera omnia fuerint inæqualia, triangulum *scalenus* dicitur. Rursus autem triangulum ratione angulorum considerari potest; si unum habeat angulum rectum, triangulum *rectangulum* dicitur; *acutangulum*, si omnes habet angulos acutos; & tandem *obtusangulum*, si angulum obtusum habuerit.

VI. Figura quatuor lateribus terminata, *quadrilaterum* generatim appellatur. Si autem æqualia sint figuræ latera & ad angulos rectos juncta, *quadratum* dicitur; at simpliciter rectangulum vocatur, si latera duo opposita reliquis duobus majora sint, manentibus tamen angulis rectis. *Parallelogrammum* appellatur figura quadrilatera, cujus bina opposita latera sunt mutuo parallela, etiamsi anguli lateribus comprehensi non

sint

sint recti. Si figura quadrilatera sit æquilatera, non tamen rectangula, *Rhombus* dicitur, & *Rhomboides* vocatur si latera opposita duntaxat æqualia habuerit. Tandem quodlibet quadrilaterum ab iis quæ jam enumeravimus diversum, *Trapezium* appellatur; sed figura *polygona* dicitur quæ pluribus quam quatuor lateribus terminatur. Si latera fuerint quinque, sex, septem &c. figura *pentagonum*, *hexagonum*, *heptagonum* &c. dici solet. Figura autem polygona *regularis* est quæ æquilatera & æquiangula est.

VII. Axiomata & postulata plurima præmittere solent Geometræ, quæ quidem nos omittimus. Quæ enim est axiomatum de toto & parte utilitas ut intelligamus dimidiam lineam tota minorem esse? Ecquis statim non videt rectam lineam produci posse, circulum dato intervallo posse describi, & reliqua hujusmodi? Verum inter axiomata unum de figurarum *superpositione* legitur simplicissimum quidem & in universa geometria utilissimum, quod sine aliqua explicatione prætermittere nolumus. Dicunt nempe *ea esse æqualia, quæ sibi mutuo superimposita perfecte congruunt*. Principium illud *superpositionis* non ita intelligendum est quasi in mutua figurarum applicatione consisteret, non secus ac artifex mensuram aliquam datæ longitudini applicat, ut inde longitudinem concludat; talis demonstrandi ratio minime foret geometrica. In eo positum est prædictum principium ut figuram alteri impositam imaginemur & deinde concludamus 1. Ex partium datarum æqualitate, ipsam earumdem partium convenientiam sive *coincidentiam*...

2.

2. Ex hac coincidentia ipsam reliquarum partium coincidentiam ac proinde & perfectam duarum figurarum æqualitatem & similitudinem. Itaque *superpositionis* principio intelligenda non est duntaxat mutua figurarum applicatio, sed partis unius alteri parti impositio, ut deinde figuras illas inter se comparemus. Unde evidens est idem valere principium ad demonstrandam figurarum inæqualitatem. Cæterum hoc unico principio cum angulorum mensura per arcus circulares conjuncto, demonstrari possunt propositiones omnes quæ ad elementarem linearum geometriam pertinent.

SECTIO I.

De Geometria linearum.

CAPUT I.

De lineis rectis quoad mutuam positionem consideratis, nullo tamen spatio seu nulla figura terminatis.

PROP. I. *Recta qualibet in Rectam eadens vel duos angulos efficit rectos, vel duobus rectis aquales.* Etenim recta insistat perpendiculariter ut GE, vel oblique ut RE. (Fig. 1.) In 1. casu patet (ex def.) angulos GEF, GEG esse rectos. In casu altero, anguli duo CER, REF, simul sumpti, æquales sunt duobus angulis CEG, GEF, hoc est, duobus rectis.

COR. I. Producta linea RE in O, simi-

si ratione patet angulos FEO, OEC, duobus rectis æquales esse, ac proinde duæ rectæ sese invicem secantes efficiunt angulos quatuor rectis æquales. Jam centro E describatur circulus, mensura angulorum quatuor erit integra circuli circumferentia, hoc est gradus 360. Igitur angulus rectus erit quarta pars circumferentiæ nempe 90.

COR. II. Rectæ GH, RO in unam lineam coalescere non possunt, sed efficiunt angulos GER, HEO, qui dicuntur *ad verticem oppositi*. Illos autem angulos æquales esse manifestum est; cum sit dimidium peripheriæ RFO æquale dimidio peripheriæ GEH; sublata autem communi parte GO, erunt arcus reliqui GR, HO æquales inter se.

COR. III. Recta GE ad alteram CF perpendicularis est, si puncta duo quælibet, G, E, a punctis duobus quibuslibet, ut C, F, æqualiter distent, hoc est, si GC = GF, & CE = EF. Etenim puncta duo E, G, non magis inclinant versus C, quam versus F, ac proinde cum duo puncta lineæ rectæ positionem determinent (ex def.) æqualis est rectæ totius GE, hinc & inde ad rectam CF, inclinatio, ideoque ob angulos utrinque æquales, recta GE, perpendicularis ad CF. Patet autem puncta C, F, sumi posse pro arbitrio inter CE, & EF.

COR. IV. Ex puncto quolibet E in recta CF dato, duci potest ad eamdem rectam perpendicularis HE. Etenim centro E, & dato quolibet æquali intervallo Ec, Ef, describantur arcus circuli, sese invicem secantes

tes in g; recta per g, & E ducta erit perpendicularis quaesita: ob distantias gc, gf & Ec, Ef aequales.

Si punctum h extra rectam datum sit, simili ratione ducitur perpendicularis hE. Etenim ex puncto h sumantur aequalia intervalla hc, hf; deinde ex punctis c & f, tamquam centris & eodem intervallo describantur arcus circuli se mutuo secantes in g, ducaturque hg; haec erit perpendicularis, ob aequales hc, hf, & gc, gf distantias. Evidens autem est in utroque casu unicam perpendicularem duci posse; unica enim est recta transiens per punctum E, vel h, quae cum recta CF, aequales hinc & inde efficiat angulos. Patet autem lineam perpendicularem esse omnium quae ex puncto dato ad lineam datam duci possunt brevissimam; cum recta perpendicularis non magis pendeat ex una parte quam ex alia, ac proinde neque ad dexteram declinet neque ad sinistram, ideoque brevissima est via a puncto dato ad lineam datam. Item evidens est ex puncto dato ad lineam datam, unicam perpendicularem duci posse.

Eadem omnino est operatio, si recta cf in duas partes aequales dividenda proponatur. Ex punctis c, f tamquam centris & eodem radio describantur arcus circuli sese secantes in g; deinde ex iisdem punctis & sumpto quolibet eodem intervallo describantur arcus se invicem secantes in h, recta hg dividet cf aequaliter in E, ut patet; cum singula puncta rectae gh, aequaliter distent a punctis c, f, ac proinde Ec = Ef.

PROP. II. Si lineæ AB, DC; sint parallelæ (Fig. 2.), erit 1. *Angulus* OFD *qui externus dicitur, æqualis angulo* OGB, *qui internus & oppositus vocatur*. 2. *Æquales erunt anguli* BGF, GFC, *qui dicuntur alterni*. 3. *Anguli interni & ad eamdem partem positi* DFG, FGB *æquales erunt duobus rectis*. Cum lineæ parallelæ eodem inter se ubique distent intervallo (ex def.) statim patet eamdem fore parallelæ utriusque BA, DC inclinationem ad rectam EO; ac proinde angulus OFD æqualis est angulo OGB, quod erat 1. Præterea cum angulus GFC æquetur angulo DFO, ad verticem opposito (cor. 2, prop. 1.) erunt etiam æquales anguli BGF, GFC: quod erat 2. Tandem cum anguli OFD, GFD, æquentur duobus rectis (prop. 1.) æquales itidem erunt duobus rectis DFG, FGB; quod erat 3.

Viceversa si angulus OFD æqualis sit interno & opposito FGB, erit eadem inclinatio rectarum CD, AB ad rectam EO, ac proinde rectæ illæ parallelæ sunt inter se. Rursus si æquales sint anguli alterni BGF, GFC; vel si duobus rectis simul æquales sint interni ad eamdem partem positi BGF, GED, angulus externus DFO semper æqualis erit angulo interno & opposito BGF, ac proinde rectæ AB, CD erunt parallelæ. Itaque ex ipsa parallelismi notione facile colliguntur tres primariæ parallelarum affectiones necessario nexu inter se conjunctæ, ita ut ex una qualibet inferre liceat rectas illas esse parallelas. Porro

in

in demonstrandis proprietatibus illis nimis laborare videntur quidam Geometræ.

COR. I. Si duæ rectæ AB, HK parallelæ sint eidem rectæ CD, erunt etiam inter se parallelæ. Etenim inclinatio rectarum KH, BA ad rectum EO eadem erit ac inclinatio rectæ CD ad eamdem.

COR. II. Si per datum punctum O ducere oporteat rectam OK parallelam rectæ CD, ducatur utcumque ex puncto O, recta OF; deinde ex puncto F tanquam centro describatur arcus GD; atque ex puncto O, & æquali radio describatur arcus æqualis FM. Tandem per duo puncta O, M, agatur recta OM, hæc erit parallela quæsita, ut patet; æquales enim sunt anguli IOM, GFD, æqualibus arcubus subtensi, ut oportet.

C A P U T II.

De linearum rectarum respectu circuli positione.

PROP. I. *Ducta recta* FM, *ad circumferentiam utrinque terminata, quæ chorda dicitur* (Fig. 3.) *recta ex centro circuli ad chordam perpendiculariter ducta, eamdem secat in duas partes æquales.* Cum enim recta EP e centro ducatur, punctum E æqualiter distat a punctis extremis chordæ F, M (ex defi.). Præterea cum recta EP sit perpendicularis ad chordam, singula alia puncta æqualem habent ab iisdem extremis distantiam (cor. 3, prop. 1.) Quare

re punctum P, æqualiter etiam distat a punctis F, M.

Et viceversa recta quælibet EP, per centrum transiens & chordam æqualiter dividens, eam quoque perpendiculariter secat. Etenim cum recta EP chordam dividat æqualiter, punctum P æqualiter distat ab extremis F, M. Quia vero recta EP transit etiam per centrum, punctum E æqualiter distat ab extremis F, M. Quare puncta P, E æqualiter distant a punctis F, M, ac proinde EP perpendicularis est ad FM.

Rursus si recta EP perpendicularis sit ad chordam, eamque æqualiter dividat, recta illa transit per centrum. Cum enim chordam dividat æqualiter, punctum P æqualiter distat ab extremis F, M. Præterea cum sit perpendicularis, singula illius puncta æqualiter etiam distant a punctis F, M. Erit ergo centrum E, hujus perpendicularis punctum aliquod,

PROP. II. *Si recta* EH *transiens per centrum dividat æqualiter chordam* FM, *æqualiter quoque dividet arcum* FHM. Etenim cum singula puncta rectæ EH, æqualiter distent a punctis F, M, æqualis erit puncti H, ab extremis F, M distantia. Quare si semicirculus GMH, semicirculo GFH, imponatur; congruet punctum M cum puncto F, & ob punctum H commune, congruent & chordæ HM, FH, & arcus iisdem chordis subtensi.

COR. I. In eodem circulo vel in circulis æqualibus chordæ æquales æqualibus arcubus respondent, inæquales autem arcubus inæqualibus. Præterea chordæ æquales æqua-

æqualiter distant a centro, chordæ autem inæquales distant inæqualiter; quod evidens est ex *superimpositionis* principio. Nam chorda æqualis cum æquali chorda semper congruet, nec cum chorda inæquali congruere unquam poterit.

COR. II. In eodem semicirculo vel in semicirculis æqualibus, quo majores sunt vel minores arcus, eo majores vel minores sunt chordæ & centro magis vel minus proximæ. Viceversa quo majores sunt vel minores chordæ, centro magis vel minus proximæ; eo etiam majores sunt vel minores arcus subtensi.

COR. III. Ducta chorda FM diametro AB parallela incercipit æquales arcus AF, BM. Etenim, cæteris manentibus ut ante, arcus AH = arcui BH, & arcus FH = arcui HM, quare demptis arcubus æqualibus remanet AF = BM. Evidens est eamdem esse demonstrationem, si parallela NQ ad oppositas diametri partes jaceat, erit nempe arcus FN = arcui MQ.

COR. IV. Si ponatur rectam NQ motu sibi semper parallelo a centro recedere, donec puncta duo N, Q, coeant in G, chorda NQ abit in *tangentem* quæ nempe circulum in unico puncto tangit; evidens autem est in hoc etiam casu esse GN = GQ.

COR. V. Ex corollariis præcedentibus patet, qua ratione per tria data puncta circulus describi possit, dummodo tamen puncta illa in eadem recta non jaceant. Agantur rectæ duæ quæ jungant tria puncta data, hæ erunt chordæ circuli quæsiti. Qua-

re ductis perpendicularibus, quæ chordas dividant æqualiter, utraque perpendicularis transit per centrum, quod proinde erit in communi utriusque perpendicularis intersectione. Simili ratione dato circuli arcu centrum invenitur, totaque circumferentia describitur.

COR. VI. Hinc arcus circuli datus in duos æquales arcus dividi potest. Ducatur chorda arcum datum subtendens, hæcque æqualiter per rectam perpendicularem dividatur, eadem perpendicularis etiam angulum quem arcus metitur æqualiter in duas partes dividet.

SCHOL. Ex hoc corollario patet facile dividi posse angulum quemlibet in partes 2, 4, 8, 16, 32, & ita deinceps secundum terminos progressionis geometricæ duplæ; sed, per geometriam elementarem, angulus in tres partes æquales dividi non potest; atque hæc est anguli *trisectio* a geometris per *circinum & regulam*, ut dicunt, hoc est per lineæ rectæ & circuli constructionem, frustra quæsita. Demonstrant enim Geometræ problema illud ad tertii gradus æquationem necessario pertinere, quæ quidem æquationes per solum circulum construi non possunt. Neque ob eamdem rationem per sola geometriæ elementa angulus dividi potest in partes 5, 6, 7, 9 &c. Talis enim divisio, pro diverso partium æqualium numero, ad altiores æquationum gradus assurgit. Id autem, quamvis ad elementa non pertineat, breviter monuisse volumus.

PROP. III. *Radius* EG *in puncto contactus* G *ad tangentem perpendicularis est*. Etenim

enim quoniam tangens circulum in unico puncto tangit (ex cor. præc.) radius EG, minima est tangentis a centro distantia, ac proinde ad tangentem perpendicularis (ex def.).

Viceversa recta RT perpendicularis ad extremitatem radii G, circulum tangit in unico puncto G. Etenim cum sit EG, minima rectæ RT a centro E distantia, alia quælibet puncta rectæ RT magis distant a centro, quam punctum G, ergo singula puncta, præter G, extra circumferentiam jacent.

COR. I. Recta circumferentiam tangit in unico puncto; cum ex centro E, ad rectam datam unica perpendicularis duci possit. (cor. 4, prop. 1, cap. 1.)

COR. II. Hinc facile ducitur tangens ad punctum datum G. Ducto scilicet radio EG, erectaque in G perpendiculari RT.

COR. III. Quoniam ad punctum datum in circumferentia, unica tangens duci potest, si per punctum contactus agatur recta quælibet, hæc coincidit cum tangente vel circumferentiam secat.

COR. IV. Si duo circuli GNA, OGQ eamdem habent tangentem, recta HG eidem perpendicularis per utriusque centrum puta E, P transibit. Jamvero si ducatur ES, jungaturque PS, quæ producta secabit in O circulum OGQ, & in R tangentem RT; erit semper in triangulo ESP latus PS, minus duobus reliquis ES, EP (ex def. lineæ rectæ). Quare cum radii ES, EG æquales sint, erit recta PS, minor quam PG sive PO. Ergo quodlibet punctum S.

circuli GSF, extra intra circulum OGQ; ac propterea illi circuli se mutuo contingent in unico puncto G, in quo, scilicet rectam RT tangunt.

SCHOL. Cum inter tangentem & circulum nulla duci possit linea recta, angulus, quem arcus circuli efficit cum tangente, minor est quolibet rectilineo, licet hic in infinitum minuatur. Hujus propositionis utilitas est in Physica ubi agitur de divisibilitate in infinitum. Id vero maximam admirationem concertationesque maximas excitavit; nempe angulus contactus quem facit arcus cum tangente per infinitam circulorum seriem in minimas partes dividitur, licet ipse quovis angulo rectilineo minor sit. Hujus autem paradoxi Geometrici caussam inde repetunt nonnulli, quod nempe anguli rectilinei natura, diversa omnino sit a natura anguli curvilinei in puncto contactus. Etenim quemadmodum infinitæ lineæ nunquam superficiem efficiunt, nec ulla inter has quantitates ratio potest assignari, licet in partes infinitas dividi possint; ita etiam infiniti anguli contactus quovis rectilineo minores sunt, licet sint divisibiles in infinitum. Verum in hac lite geometrica *logomachia* aliqua latere videtur. Si anguli nomine intelligatur portio finita spatii curva & tangente comprehensi, nullum dubium est, quin spatium illud comparari possit cum portione finita spatii rectarum duarum concursu intercepti. At si anguli rectilinei notio vulgaris adhibeatur, evidens est notionem illam absolute consideratam angulo-

gulo contactus convenire non posse ; cum in hoc angulo latus unum sit curvilineum. Itaque hujus anguli afferri debet propria definitio , atque hac definitione quæ arbitraria omnino est semel constituta & explicata, jam nihil difficultatis superesse potest. Et re quidem ipsa de solo nomine hic litigari demonstrat summa Geometrarum consensio circa anguli hujus proprietates. Sed quidquid sit, quicumque geometricarum demonstrationum vim percipiet, pro evidenti habebit angulum contactus & minorem esse quovis rectilineo , & in infinitos curvilineos dividi posse.

PROP. IV. *Angulus* BAD , *tangente* BA *& chorda* AD *comprehensus* , *habet pro mensura dimidium arcum* AFD . Etenim ducta diametro GE , chordæ AD parallela (Fig. 4.) ductaque alia diametro fF eidem cordæ perpendiculari, rectus erit angulus BAC tangente & radio comprehensus (prop. præced.) itemque rectus est angulus FCG , ac proinde utriusque anguli mensura est arcus FG . Sed angulus BAD = BAC — DAC , vel — ACG , ob parallelas DA , EG . Quare cum ACG pro mensura habeat arcum AG , erit angulus BAD = FAG — AG

$= FA = \frac{1}{2} AD$.

PROP. V. *Angulus* CAD (Fig. 5.) *ad circumferentiam habet pro mensura dimidium arcum* CD , *lateribus* AG , AD *interceptum*. Etenim ex anguli vertice A , ducatur tangens EB , summa trium angulorum

BAC + CAD + DAE = 180 = $\frac{1}{2}$ AC + $\frac{1}{2}$ CD + $\frac{1}{2}$ DA. Sed angulum BAC metitur $\frac{1}{2}$ C, & angulus EAD = $\frac{1}{2}$ AD (ex prop. præc.). Ergo angulus CAD = $\frac{1}{2}$ CD.

COR. I. Angulus DFC ad centrum duplus est anguli DAC ad circumferentiam, eodem arcu CD, subtensi.

COR. II. Angulus rectus in circumferentia circuli, semicircumferentiam lateribus suis comprehendit totaque diametro subtenditur. Angulus acutus arcum semicircumferentia minorem, obtusus autem majorem intercipit, uterque chorda subtenditur.

COR. III. Angulus BAD (Fig. 6. 7.) vel intra vel extra circulum pro mensura habet $\frac{1}{2}$ BD $\mp$ $\frac{1}{2}$ CE. Signum + valet pro angulo intra circulum, signum — pro angulo extra. Per E agatur chorda EF rectæ AD parallela, erit angulus BEF = BAD (ob parallelas). Sed mensura anguli BEF est $\frac{1}{2}$ BF, & $\frac{1}{2}$ BF = $\frac{1}{2}$ BD $\mp$ $\frac{1}{2}$ DF, & DF = CE (cor. 3, prop. 2.). Ergo $\frac{1}{2}$ BF = $\frac{1}{2}$ BD $\mp$ $\frac{1}{2}$ CE.

COR. IV.

COR. IV. Angulus bAD (Fig. 7.) tangente Ab ; & ſecante AD interceptus = $\frac{1}{2}$ Db — $\frac{1}{2}$ bC. Si enim circa punctum A revolvi intelligatur recta AB, donec tangens evadat in b, puncta E, B convenient in b. Simili ratione angulus dAb, inter duas tangentes Ad, Ab comprehenſus, pro menſura habet $\frac{1}{2}$ dFb — $\frac{1}{2}$ dCb.

CAPUT III.

De lineis rectis quæ ſpatium claudunt, ſeu de figurarum rectilinearum proprietatibus.

PROP. I. *In triangulo quolibet ſumma trium angulorum æqualis eſt duobus rectis.* Etenim per tres angulorum vertices deſcribatur circulus (cor. 2, prop. 2, cap. 2.) triangulum erit inſcriptum circulo, cujus chordæ erunt tria latera ; anguli autem habent pro menſura dimidium arcum lateribus oppoſitis ſubtenſum (prop. 5, cap. 2.). Quare trium angulorum ſumma æqualis eſt dimidiæ trium arcuum ſummæ. Hoc eſt, dimidiæ circumferentiæ ſeu gradibus 180.

COR. I. In triangulo unicus eſſe poteſt angulus rectus vel obtuſus, reliqui duo ſunt acuti. Quare in triangulo rectangulo, angulus acutus eſt *complementum* alterius ad rectum.

COR.

COR. II. Datis duobus angulis in triangulo datur & tertius qui est differentia inter datam duorum angulorum summam & gradus 180. Si autem unicus datus sit angulus, data est reliquorum duorum summa, quae est *complementum* ad duos rectos, & *supplementum* sinpliciter appellari solet.

COR. III. In trianguto quolibet ABC (Fig. 8.) producto latere BC, angulus externus ABI aequalis est duobus angulis internis oppositis ACB, CAB. Etenim summa anguli externi ABI, & interni contigui ABC aequalis est duobus rectis (prop. 1, cap. 1.) Sed summa trium angulorum ACB, CAB, ABC aequalis etiam est duobus rectis. Ergo angulus externus ABI, aequalis est duobus internis oppositis ACB, CAR: dempto scilicet communi angulo ABC.

PROP. II. *In omni triangulo majus latus opponitur majori angulo, minus autem minori, & viceversa angulus major majori lateri, & minor minori opponitur*. Triangulum circulo inscribatur, majorem angulum metitur arcus major, & majorem arcum subtendit major chorda & contra (cor. 2, prop. 2, cap. 2.).

COR. I. In triangulo aequilatero singuli anguli aequales sunt inter se, & viceversa si tres anguli sunt aequales inter se, triangulum est aequilaterum. Inscripto enim, ut ante, triangulo in circulo, tria latera aequalia, fient tres aequales chordae circuli quae proinde tres arcus aequales subtendent; ideo-

que

que & tres anguli æquales sunt. Evidens autem est unumquemque angulum esse tertiam partem grad. 180, hoc est æqualem grad. 60.

COR. II. In triangulo isoscele æquales sunt anguli lateribus æqualibus oppositi, & contra si duo anguli in triangulo æquales sunt, triangulum est isosceles. Patet ut in coroll. præc.

PROP. II. *Si duobus triangulis tria latera æqualia sint, tota triangula erunt æqualia*. Sit AB = ab, AC = ac, BC = bc (Fig. 9.) Ex punctis A, B, tanquam centris describantur arcus FCG, DCE, se invicem secantes in C. Triangulum abc, ita imponatur triangulo ABC, ut punctum A conveniat cum a; punctum b cadet etiam in B, ob AB = ab; & ob ac = AC, recta *ac* terminabitur in aliquo puncto arcus FCG. Similiter ob bc = BC, recta bc terminabitur in aliquo puncto arcus DCE; quia vero rectæ ac, bc, se mutuo jungunt in c, utraque terminabitur in puncto intersectionis C. Ergo ac congruet cum AC, bc cum BC; totumque triangulum abc cum triangulo ABC.

COR. I. Si sit angulus A = a, B = b, C = c & latus AB = ab, erit triangulum ABC = triangulo abc. Latus ab imponatur lateri AB; ob angulum a = A & b = B, cadet ac in AC; & bc in BC; quare latera duo ac, ba & AC, BC in eodem puncto jungentur, hoc est, c cadet in C, totumque triangulum abc congruet cum triangulo ABC. Eodem modo comparari inter se possunt latera duo ac, AC,

quæ

quæ respondent angulis æqualibus; & hæc dicuntur *homologa*. Quare æqualia sunt triangula duo, si anguli unius æquales sint angulis alterius, & prætera si triangula latus unum homologum æquale habeant.

COR. II. Si duo triangula latera duo habuerint æqualia & angulos his lateribus interceptos æquales, rota triangula erunt æqualia. Sit AC = ac, AB = ab & angulus A = a. Imponatur latus AB lateri ab, & latus AC lateri ac; ob angulos A, a æquales, latera illa congruent. Præterea cum sit AC = ac, & AB = ab, punctum c cadet in C, & b in B, ac proinde bc congruet cum BC.

PROP. IV. *Si duo triangula inæqualia æquales habeant angulos, ponaturque angulus unus supra alterum æqualem angulum, itemque sibi mutuo imponantur latera homologa quæ æqualem in utroque triangulum comprehendunt, erit tertium latus tertio lateri parallelum*. Ponatur angulus D (Fig. 10.) supra angulum æqualem B, latus DE supra latus homologum BC, & latus DE supra latus BA itidem homologum; erit latus FE vel fe parallelum lateri AC. Cum enim angulus feB æqualis sit angulo CAB, erit recta fe rectæ AC parallela (prop. 2, c. 1.) Si angulus F poneretur supra angulum æqualem C, simili modo demonstratur rectam DE esse rectæ AB parallelam. Idem dicendum de rectis FD, BC.

Viceversa si per punctum f, pro arbitrio sumptum in latere trianguli agatur recta fe parallela rectæ AC; æquales sunt anguli Bfe, BCA; & Bef, BAC (loc. cit.).

Trian-

Triangula illa, quæ angulos habent respective æquales dicuntur *similia*.

PROP. V. *Quodlibet polygonum resolvi potest in tot triangula quot sunt polygoni latera*. Etenim ex puncto C intra polygonum (Fig. 11.) ad singulos angulos duci possunt rectæ; evidens autem est tot esse triangula, quot polygoni latera.

Alia ratione in triangula dividi possunt polygona (Fig. 12.). Si nempe ex polygoni angulis ducantur tot rectę, quot duci possunt, quæ tamen se mutuo non secent. Illæ autem rectæ quæ ab angulo polygoni ad alium ducuntur, *diagonales* vocantur; patet in hoc casu tot esse triangula quot latera polygoni, demptis duobus.

COR. I. Summa angulorum polygoni æqualis est producto ex 180 in numerum laterum, demptis duobus, hoc est demptis 360. Etenim anguli polygoni simul sumpti æquales sunt angulis omnibus triangulorum in quæ reductum est polygonum, demptis angulis quorum vertex est in C. Horum autem angulorum summa est 360 (prop. 1, c. 5.) Sed tot sunt triangula quot latera; quare summa omnium angulorum polygoni æqualis est producto ex 180 in numerum laterum, binario mulctatum. Ita si polygonum habuerit septem latera,

summa angulorum est $= 180 \times \overline{7 - 2} =$ 90.

Idem quoque evidens est, si polygonum per diagonales in triangula dividatur; erit enim in his triangulis angulorum summa angulis polygoni æqualis; ac proinde summa

ma illa æqualis est producto ex 180 in numerum triangulorum, hoc est, in numerum laterum polygoni, demptis duobus.

COR. II. Polygonum quodlibet regulare circulo inscribi potest. Dividantur in duas partes æquales anguli polygoni per rectas AC, BC, DC, EC &c.; rectæ illæ se mutuo secabunt in C, & erunt inter se æquales. Etenim rectæ AC, BC sibi occurrentes in puncto aliquo C, efficiunt triangulum ABC, itemque rectæ BC, DC aliud efformant triangulum BCD. Sed triangula illa sunt æqualia; nam cum anguli polygoni regularis æquales sint & bifariam æqualiter dividantur, æquales sunt anguli CAB, CBA inter se, & anguli CBD, CDB, præterea æqualia sunt latera AB, BD. Ergo isoscelia sunt & æqualia triangula ACB, BCD, (cor. 2, prop. 3.). Quare AC = DC = BC; & propter latus commune BC, punctum intersectionis rectarum AC, BC, cadet in punctum C. Idem valet de aliis rectis EC, FC &c.

COR. III. Radii e centro polygoni regularis ad angulos ducti, polygonum dividunt in tot triangula isoscelia & æqualia, quot sunt polygoni latera; & quodlibet polygoni latus fit chorda arcus qui æqualis est quoto ex gradibus 360 per numerum laterum divisis. Ita latus decagoni est corda arcus grad. 36.

COR. IV. Latus hexagoni regularis circulo inscripti æquale est circuli radio. Nam si ex centro C, in sex triangula dividatur hexagonum, æquilatera sunt triangula illa ob radios CA, CB æquales & angulum

ACB

ACB = 60. Quare singuli anguli CAB, ABC sunt etiam 60, ac proinde CA = AB.

COR. V. Quodlibet polygonum regulare circulo circumscribi potest, hoc est, intra polygonum regulare describi potest circulus qui singula tangat polygoni latera. Etenim cum latera polygoni regularis circulo inscripti, totidem sint chordæ æquales, chordæ illæ a centro æqualiter distant (cor. 1, prop. 2, c. 2.). Quare si ex centro C, agantur perpendiculares CI, CK, hæ chordas æqualiter divident, atque æquales erunt. Ergo per singulas perpendicularium extremitates describi poterit circulus qui singula polygoni latera in puncto medio tanget (cor. 1, prop. 3, cap. 2.).

COR. VI. Hinc polygono regulari dato circulus circumscribi potest. Quæratur polygoni centrum, quo invento, circulus facile circumscribitur. Item polygono regulari circulus facile inscribitur; invento polygoni centro, ad latus aliquod demittatur perpendicularis, hæc erit circuli radius.

Viceversa polygonum regulare circulo dato circumscribi potest. Dividantur 360 per duplum numerum laterum polygoni, sumptoque arcu i, K, qui sit quoto æqualis, per extremitates K, i, ducatur radius CK agaturque recta indeterminata CB; ad punctum K erigatur perpendicularis DKB, occurrens CB in puncto B, transferatur KB in KD, erit DB latus polygoni quæsiti. Simili modo inveniuntur alia latera. Vel etiam radio CB describatur circulus & per totam circumferentiam transferatur chorda DB, atque in-

inscribatur polygonum DBAGFED, quod erit circulo dato circumscriptum, ut patet; cum per constructionem tot habeantur tangentes æquales & æqualiter divisæ in puncto contactus, quot sunt latera in polygono quæsito.

Simili constructione circulo dato polygonum regulare inscribitur. Dividatur numerus 360 per numerum laterum polygoni quæsiti, sumatur in circulo dato arcus huic quoto æqualis, chorda hujus arcus erit latus polygoni; transferatur chorda illa per totam circumferentiam, habebitur polygonum quæsitum.

Hic autem diligenter observandum est per Geometriam elementarem circulo inscribi posse duntaxat triangulum æquilaterum, pentagonum, pentedecagonum, hoc est, figuram quindecim laterum, & polygona regularia in quibus numerus laterum se habet in progressione geometrica dupla. Ita triangulum æquilaterum præbet polygona regularia laterum 6, 12, 24, 48 &c. quadratum præbet polygona laterum 8, 16, 32, 64 &c. Ex pentagono oriuntur polygona laterum 10, 20, 40, 80 &c. Tandem ex pentedecagono oriuntur polygona laterum 30, 60, 120, 240 &c. Alia polygona ut Heptagonum, Enneagonum, Hendecagonum &c. describi non possunt geometrice, nisi per constructionem æquationum quæ ad sublimiorem gradum assurgunt.

SCHOL. Cum polygonum regulare circulo inscribi & circumscribi possit, quo major est in polygono inscripto vel circumscripto laterum numerus, eo magis polygonum ad cir-

circulum accedit. Itaque augeatur numerus laterum polygoni in infinitum, ita ut differentia inter polygonum & circulum sit data quavis differentia minor, jam circulus considerari poterit tanquam polygonum regulare ex lateribus numero infinitis & infinite parvis compositum. Hæc circuli consideratio pendet ex principio omnino evidenti. Si nempe duarum quantitatum A, B, differentia sit qualibet assignabili minor, quantitates illæ velut æquales haberi debent. Etenim ponatur inter illas quantitates differentia aliqua data, jam quantitatum illarum differentia non est qualibet assignabili minor, quod est contra hyp. Quantitas autem, quæ ad aliam accedit pro differentia qualibet data minori, hujus alterius quantitatis *limes* appellatur. Methodus autem illa vocatur methodus *Exhaustionum*, seu *primarum* & *ultimarum* rationum. Hanc methodum quam fusius explicabimus in prima parte physices, ubi sermo erit de extensionis divisibilitate, in proximo capite, quantum hactenus nobis satis est, breviter exponemus.

CAPUT IV.

De linearum ratione, seu de proportionibus.

PROP. I. *In triangulis similibus* acb; ACB, (Fig. 13.) *latera homologa sunt proportionalia*. Ponatur ab pars dimidia rectæ AB, agaturque cg parallela rectæ AB, erit cg = bA. Quod evidens est ex linearum parallelismo; ducta enim linea bg, erit ob angulos inter parallelas æquales & ob

latus commune bg, triangulum bcg æquale triangulo bgB, & latus cg $=$ bB (cor. 1, prop. 3, c. præc.) Ergo cg $=$ bB $=$ Ab. Præterea triangulum Ccg, æquale est triangulo cAb (loco cit.). Ergo Cc $=$ Ac, & Cg $=$ cb $=$ gB. Quare Ac vel Cc, erit pars dimidia rectæ AC, ficut cb est pars dimidia rectæ CB.

Si AB fit tertia vel quarta aut quælibet alia pars rectæ AB (Fig. 14.) fimili modo evidens est rectas Ac, cb, esse tertiam, quartam &c. partem rectarum, AC, CB. Etenim ex divifionum punctis b, f in recta AB, ducantur bc, fh &c. rectæ BC parallelæ, & eadem ratiocinatione patet triangula Acb, chg, hCi &c. æqualia esse triangulo acb.

Si recta Ab, accurate non contineatur in AB, fed cum fractione aliqua, E. G. bis cum dimidio, fimili ratione Ac bis cum dimidio continebitur in AC, & bc in BC. Etenim factis duobus triangulis Acb, chg æqualibus triangulo acb; inter parallelas hf & CB conftrui poterit triangulum Chi, cujus latera erunt dimidia pars laterum trianguli cAb; quod est evidens, cum fit fB pars dimidia rectæ Ab (per hypoth.) & recta h i æqualis rectæ fB, ob parallelas hf, CB.

Tandem ponamus in triangulis ACB, hCi, rectas AB, hi esse inter fe *incommenfurabiles*: divifa intelligatur recta hi, in partes 100, jam recta AB certum continebit partium numerum cum aliquo refiduo, cum lineæ illæ fint incommenfurabiles. Rurfus recta hi divifa fingatur in partes 1000,

cer-

certum earumdem partium numerum continebit recta AB; sed cum residuo quod priori residuo minus est; atque ita deinceps minus perpetuo fiet residuum, quo plures erunt partes. Quare, ponatur partium numerus infinitus, jam residuum fit nullum. Ergo generatim triangula quælibet similia, latera homologa habent proportionalia.

COR. Numerus quilibet partium in CB erit ad numerum partium in CA inter easdem parallelas, ut numerus quilibet alius partium in CB ad numerum partium in CA inter easdem parallelas. Etenim Ch: hc ⊐ Ci: im, & Ch: Ci ⊐ hc: im. Item hc: cA ⊐ im: mB, & hc: im ⊐ cA: mBf. Ergo Ch: Ci ⊐ hc: im ⊐ cA: mB. Quare CB est ad CA, ut numerus quilibet partium in CB ad eumdem numerum partium in CA.

PROP. II. *Duo triangula in quibus latera homologa sunt proportionalia, æquiangula sunt.* Si (Fig. 10.) ponatur AC: BC ⊐ EF: FD, & AC: AB ⊐ FE: ED, æquiangula erunt triangula ABC, DEF. Nam si super EF construatur triangulum FEG triangulo ABC æquiangulum, facto scilicet angulo GEF ⊐ BAC, & angulo GFE ⊐ BCA, AC: BC ⊐ FE: FG: sed (per Hyp.) AC: BC ⊐ FE: FD, ergo FE: FG ⊐ FE: FD, ac proinde FD ⊐ FG. Similiter ob triangula ABC, FEG similia; erit AC: AB ⊐ FE: EG; sed (ex hyp.) AC: AB ⊐ FE: ED. Ergo FE: EG ⊐ FE: ED, ac proinde EG ⊐ ED. Quare triangula duo FED, FEG æquiangula sunt & æqualia, ob latus commune FE, & late-

tera FD, FG, & EG, ED æqualia (prop. 3, cap. præced.) Sed (per constr.) triangulum FEG triangulo ABC est æquiangulum, ergo triangulum FED ipsi quoque est æquiangulum.

COR. I. Si in triangulis ABC, DEF, sit angulus D = B, & præterea DE : DF = BA : BC, erit triangulum DEF triangulo ABC æquiangulum. Nam super AB capiatur Be = DE, ducaturque ef parallela rectæ AC, triangula ABC, eBf sunt æquiangula, cum ob parallelam ef, angulus feB = A, efB = C, & ob angulum B communem. Ergo Be; Bf = BA : BC. Sed (ex hypoth.) DE : DF = BA : BC, ergo Be : Bf = DE : DF; at Be = DE, ergo Bf = DF; ac proinde duo triangula Bef, DEF, sunt æqualia & similia; sed Bef est triangulo ABC æquiangulum; ergo triangulum DEF est æquiangulum triangulo ABC, ac proinde generatim triangula duo, quæ duo latera homologa circa æqualem angulum habent proportionalia, sunt æquiangula.

COR. II. Si recta AD (Fig. 15.) angulum BAC, bifariam & æqualiter dividat in triangulo BAC, eadem recta latus oppositum BC dividit quoque in duas partes BD, DC lateribus AB, AC proportionales. Etenim producta recta CA, per punctum B agatur BE rectæ AD parallela, triangula BCE, DAC erunt similia (prop. 1.); ac proinde BD : DC = AE : AC, sed ob parallelas, angulus BEA = DAC = DAB = ABE; ergo triangulum BAE est isosceles (cor. 2, prop. 2, cap. præc.); quare

AE

$AE = AB$, ideoque $BD : DC = AB : AC$.

COR. III. Si ponatur triangulum BAC rectangulum, & ex angulo recto A demittatur perpendicularis AD in basim BC, quæ angulo recto imminet & *hypotenusa* dicitur, hæc dividet triangulum in duo alia triangula BAD, DAC inter se, & triangulo BAC similia. Et quidem triangula BAD, DAC, præter angulum rectum, habent quoque cum triangulo BAC angulum communem, ac proinde similia sunt inter se & toti triangulo. Hinc $BD : DA = DA : DC$, & $BD : BA = BA : BC$, ac tandem $DC : CA = CA : CB$.

COR. IV. Cum sit $BD : BA = BA : BC$, erit $BA^2 = BD \times BC$ (ob productum mediorum æquale producto extremorum). Similiter cum sit $DC : AC = AC : CB$, erit $AC^2 = DC \times CB$. Ergo $BA^2 + AC^2 = BD \times BC + DC \times CB = \overline{BD + DC} \times BC = BC \times BC = BC^2$. Quare quadratum hypotenusæ in triangulo rectangulo æquale est quadratis laterum.

COR. V. Diagonalis quadrati est lateri *incommensurabilis*. Cum enim diagonalis sit hypotenusa trianguli rectanguli, cujus latera sunt æqualia, quadratum diagonalis æquale est duplo quadrato lateris. Sed numeris exprimi non potest radix quadrati dupli (ex demonstratis in Arithmetica). Ergo si latus quadrati numeris exprimatur, exprimi non poterit diagonalis, & contra.

COR. VI. Perpendicularis EO (fig. 16.) ex circumferentiæ circuli puncto quolibet

in diametrum demissa, est media proportionalis inter duo segmenta CO, OL; nam si ex puncto E ad diametri extremitates agantur rectæ EC, EL, triangulum CEL est rectangulum in E, ac proinde CO: EO = EO: OL; & EO^2 = CO × OL. Recta perpendicularis EO dici solet *ordinata*, *abscissa* autem vocatur pars CO diametri inter perpendicularem, & circumferentiam comprehensa.

PROP. III. *Si ducantur in circulo chordæ duæ* BA, DC (Fig. 17.) *se mutuo secantes in* E, *chordarum segmenta erunt reciproce proportionalia.* Si enim ducantur DA, CB, triangula BEC, DAE sunt similia ob angulos in E æquales, atque ob angulos C, A, & B, D iisdem arcubus subtensos. Quare AE : DE = EC : BE.

COR. I. Si duæ lineæ EB, EC (Fig. 18.) ex eodem puncto extra circulum ductæ, ad superficiem concavam terminentur partes externæ EA, ED rectis integris EB, EC sunt reciproce proportionales. Ductis enim chordis AC, DB, triangula EBD, EAC similia sunt, ob angulum E communem & angulos B, C eodem arcu AD subtensos. Ergo EA : ED = EC : EB.

COR. II. Si recta EB sit secans, altera autem Ed tangens, erit EB : Ed = Ed: EA. Nam ductis dB, dA, similia erunt triangula EdB, EdA, ob angulum E communem, & angulos EBd, AdE æquales, quorum communis mensura est dimidius arcus Ad (cor. 3, prop. 4, c. 2.). Ergo angulus dAE = EdB, ac proinde EB : Ed = Ed : EA, hoc est, tangens est media pro-

por-

portionalis inter rectam totam EB & partem externam EA.

COR. III. Hinc facile dividitur recta data bifariam, ea conditione ut major pars sit media proportionalis inter totam rectam & ejusdem rectæ partem alteram. Nam (Fig. 19.) super datæ rectæ AB extremitatem erigatur perpendicularis AE, dimidiæ AB æqualis, & centro E, radio AE describatur circulus DAF. Deinde per B & E agatur recta BF, & centro B, radio BD describatur arcus DC, hic occurret rectæ AB in puncto quæsito. Etenim ob tangentem BA, erit BF : BA = BA : BD, ac proinde BF — BA : BA = BA — BD : BD. Sed BF — BA = BD = BC, cum sit FD = BA utpote dupla ipsius EA quæ est dimidia rectæ AB. Simili modo BA — BD = AC; ergo substitutione facta BC : BA = AC : BC, vel BA : BC = BC : AC. In hoc corollario continetur problema quod his verbis proponere solent Geometræ: *Rectam dividere in media & extrema ratione.*

Alia etiam problemata proponi solent qualia sunt: *Tribus datis rectis quartam proportionalem invenire*: *Inter duas rectas invenire mediam proportionalem*. Sed hæc manifesta sunt ex præcedentibus.

PROP. IV. *Si duæ figuræ similes in triangula utcumque dividantur per diagonales ex angulis homologis ductas triangula homologa erunt similia.* Etenim sint duo polygona ABCDE, FGHIK (fig. 20.), in quibus angulus A = F, B = G, C = H, E = I, E = K, sitque præterea AB : FG = BC : GH = CD : HI = DE : IK = EA : KF : ductis

 dia-

diagonalibus AC, AD, FH, FI, similia erunt triangula ABC, FGH, & ACD, FHI atque ADE, FIK. Nam cum anguli B, G æquales sint & lateribus proportionalibus comprehensi, similia erunt triangula ABC, FGH, & ADF, IFK. Itaque angulus BAC $=$ GFH, DAE $=$ FIK. Ergo BAE $-$ BAC $-$ DAE $=$ CAD $=$ GFK $-$ GFH $-$ IFK $=$ HFI. Igitur angulus CAD $=$ angulo HFI. Simili modo ostenditur angulos ACD, FHI, & ADC, FIH æquales esse. Quare triangula ACD, FHI sunt æquiangula.

Viceversa duæ figuræ quælibet similes sunt, si in triangula æquiangula resolvi possint. Nam ob angulos æquales in triangulis æquiangulis, æquales sunt anguli homologi in unaquaque figura. Quare cum latera figurarum sint triangulorum æquiangulorum latera proportionalia, figuræ similes sunt.

COR. Si dividatur BC in L, latusque homologum GH in M in eadem ratione, ita ut sit BC : GH $=$ LC : MH. Deinde si ducantur rectæ duæ ad arbitrium LN, MO, quæ angulos CLN, HMO æquales efficiant; vel quæ dividant latera homologa ED, KI in eadem ratione, ita ut sit ED : KI $=$ DN : IO, erit LN : MO $=$ CD : HI $=$ BC : GH &c. Nam ductis NC, OH, triangula NCD, OHI similia sunt ob angulos D, I æquales lateribus proportionalibus ND, DC, & OI, IH comprehensos. Quare CD : HI $=$ CN : HO, & angulus CDN $=$ IHO. Si ergo anguli illi auferantur ex angulis æqualibus DCL, IHM, remanebunt æquales anguli NCL, OKM, ac proinde triangula NCL, OHM similia sunt, ideoque LN :

MO

MO :: LC : MN :: BC : CH :: CD, HI &c. Quare generatim si in duobus polygonis similibus ducantur lineæ, quæ dividant latera homologa vel angulos homologos in eadem ratione, lineæ illæ erunt proportionales inter se, atque etiam earundem polygonorum lateribus quibuscumque homologis.

SCHOL. Linearum rationem jam consideravimus in quantitatibus finitis, superest ut pauca, quantum nobis necesse est, explicemus de ratione quantitatum quas *infinite magnas* & *infinite parvas* appellant. Et in primis quidem observandum est, nullam quantitatem in se spectatam, & sine nostro cogitandi modo, aut infinite parvam esse aut infinite magnam; sed magnitudo quælibet in se determinata est. Et quidem data quamvis magnitudine, utcumque parva, vel utcumque magna, alia semper minor in primo casu, & alia semper major in casu altero haberi potest; nobis enim licet quantitatem exiguam vel ingentem considerare, primamque minuere, alteram augere, abstrahendo animum a quovis limite determinato; priorem quantitatem dicimus *infinitesimam* vel *infinite parvam*, quantitatem alteram appellamus *infinitam*, vel *infinite magnam*, rationem quam duæ quantitates finitæ habent ad se invicem, *rationem finitam* vocamus. Patet autem diversos esse infinitorum & infinitesimorum ordines: licet enim magnitudo aliqua concipiatur infinita vel infinitesima, semper tamen quantitas manet, ac proinde ultra quoscumque limi-

tes augeri poteſt & minui. Si quantitatem aliquam finitam ultra quoſcunque limites minui concipiamus, hanc dicimus infiniteſimam *ordinis primi*. Si autem quantitas alia ad hanc infiniteſimam habeat rationem quam ipſa infiniteſima habet ad quantitatem finitam, quantitatem hanc dicimus infiniteſimam *ſecundi ordinis*, & ita deinceps. Viceverſa ſi quædam quantitas ſit ad finitam quantitatem, ut quantitas finita ad infiniteſimam ordinis primi, eam dicimus infinitam *ordinis primi*, & ita deinceps ſuperiores infinitorum ordines intelligere licet. Exemplum ſit in circulo, cujus diameter eſt ad chordam, ut eſt chorda ipſa ad abſciſſam, ac proinde ſi fingatur chorda infinite parva primi ordinis, erit abſciſſa infiniteſima ordinis ſecundi.

Ex his patet calculo ſubjici poſſe quantitates infinitas & infiniteſimas. Infinitum hac nota exprimi ſolet ∞. Quare numerorum ſeries infinita hoc modo repræſentari poteſt, 0, 1, 2, 3, 5, ... ∞. Pari modo quantitas quælibet finita concipi poteſt diviſa in partes perpetuo decreſcentes, donec perveniatur ad quantitaem infiniteſimam. Talis eſt ſeries, $\frac{1}{1}\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{3}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{5} \ldots \frac{1}{\infty}$.

Evidens autem eſt quantitatem infinitam finitæ quantitatis additione, vel ſubtractione majorem, vel minorem non fieri, cum finita quantitas ad quantitatem infinitam, rationem habeat qualibet data minorem; ſimili ratione, quantitas infinite parva quantita-

titatem finitam augere, vel minuere non potest. Itaque $\infty = \infty \pm 1$, & $1 = 1 \pm \frac{1}{\infty}$. Eodem modo si diversi infinitorum ordines per diversos exponentes designantur, erit $\infty^2 + 2\infty = \infty^2$ & $\frac{1}{\infty} + \frac{1}{\infty^2} = \frac{1}{\infty}$.

Verum si quantitates ejusdem generis considerentur, sive infinitæ, sive infinitesimæ, ex notione quantitatum illarum manifestum est eas non secus ac quantitates finitas tractari debere, probe enim recordandum est, quantitates illas non absolute sed relative duntaxat, & secundum nostrum concipiendi modum, esse infinitas, vel infinitesimas. Quare $\infty + \infty = 2\infty$; $\frac{1}{\infty} \times 3\infty = \frac{3\infty}{\infty} = 3$; $\frac{2\infty}{2} \frac{2}{\infty}$; $\infty \times \infty = \infty^2$; $\frac{\infty^3}{\infty^3} = \infty$, $\frac{2}{\infty^2} = \frac{1}{\infty}$; $\frac{1}{\infty} \times \frac{1}{\infty} = \frac{1}{\infty^2}$; $\frac{1}{\infty^2} : \frac{\infty}{\infty}^2 = \frac{1}{\infty^2} = \infty$.

Ex his multa colligere est.

Quantitates infinitæ vel infinitesimæ ejusdem ordinis adduntur vel subtrahuntur non secus ac vulgares quantitates. Quantitas infinita primi ordinis multiplicata per quantitatem infinitam itidem ordinis primi producit quantitatem infinitam ordinis secundi. At quantitas infinita ordinis cujuscumque per quantitatem finitam multiplicata producit quantitatem infinitam ejusdem ordinis. Et generatim quantitas infinita cujusvis ordinis per aliam quanti-

tatem ordinis cujuscumqae multiplicata evehitur ad illius infiniti gradum, cujus exponens est ipsa exponentium summa. Contraria autem ratione, si quantitas infinita ordinis cujuscumque per quantitatem infinitam ordinis cujuslibet dividatur, habetur quantitas cujus gradus designatur per ipsam exponentium differentiam. At si quantitas infinitesima cujuslibet gradus per quantitatem infinitesimam ordinis cujuscumque multiplicetur aut dividatur, in primo casu quantitas infinitesima ad eum deprimetur gradum qui per exponentium summam exhibetur; in casu autem altero quantitas infinitesima ad eum gradum evehitur, qui per ipsam exponentium differentiam repræsentatur, ita ut quantitas infinitesima per divisionem fieri possit finita atque etiam infinita. Hæc pauca dicta sint de *primarum & ultimarum rationum* methodo, quam quidem ad methodum *exhaustionum* revocari posse intelligitur.

ELE-

ELEMENTA
TRIGONOMETRIÆ PLANÆ.

I. EX linearum proportione tota pendet *Trigonometria*; quæ est ars resolvendi triangula; in triangulo autem sex partes considerari possunt, nempe tres anguli & tria latera. Huc autem refertur trigonometriæ praxis, ut datis tribus ex sex partibus trianguli, quæ tamen tres anguli esse non debent, partes reliquæ inveniantur; ac proinde tres partes datæ constituere debent tres primos proportionis terminos, & terminus quartus erit pars quæsita. Verum quia latera trianguli simplicem rationem non habent cum angulis, quorum mensura sunt arcus circuli, angulis vel arcubus circuli substituuntur lineæ rectæ, quæ arcubus illis respondeant, & trianguli lateribus proportionales sint. Harum linearum definitiones afferemus, & proprietates demonstrabimus.

Sit angulus quilibet ACB (Fig. 21) ex cujus vertice C, tanquam centro, & radio ad arbitrium sumpto describatur circulus AHaG. Producatur AC in a, erigaturque in C perpendicularis CH; evidens est angulum BCH vel arcum HB esse *complementum* anguli ACB: vel arcus AB, angulus BCa vel arcus Ba dicitur *supplementum* anguli ACB, vel arcus AB; & viceversa BA est *complementum* ipsius HB; & *supplementum* ipsius aB. Recta BD ex radii extremitate

B ad radium CA perpendiculariter ducta, dicitur *sinus* arcus AB, vel anguli ACB. Recta AE ex radii extremitate A perpendiculariter ducta & radio alteri occurrens in E, vocatur *tangens* arcus AE; recta autem CE, ejusdem arcus *secans* appellatur. Pars AD radii inter arcum & sinum comprehensa dicitur sinus *versus* arcus AB. Perpendicularis BI dicitur *sinus complementi* arcus AB; perpendicularis HK *tangens complementi*, CK *secans complementi*, & HI *sinus versus complementi* arcus AB. Compendii ergo sinus complementi, tangens complementi &c. dicuntur *Cosinus*, *Cotangens*, *Cosecans*, *Cosinus versus*. Brevitatis causa scribuntur R pro radio; sin. pro sinu; tang. pro tangente; sin. v. pro sinu verso.

II. Ex his definitionibus multa colliguntur . . 1 Sinus, cosinus, tangens, cotangens &c. anguli obtusi BCa, sunt etiam sinus, cosinus &c. anguli acuti ACB, qui est anguli obtusi supplementum. Nam ex radii alterutrius extremitatibus B, vel a, demitti non potest perpendicularis, quae non cadat in radium alterum productum; tales sunt perpendiculares BD, ad; similiter tangens alia esse non potest quam ae; sed ob triangula aCA, BCD, & Cae, CAE aequalia, habetur ad = BD, ae = AE. Cum autem sit arcus BH complementum arcus aB, atque etiam arcus AB, evidens est BI esse cosinum arcus aB, & HK illius cotangentem . . . 2 Sinus BD arcus AB est dimidium chordae BG, angulum duplum BAG subtendentis. (ex elem.) . . . . . 3 Sinus crescunt crescentibus angulis a 0 usque ad

90,

90, & eodem modo decrescunt a 90 usque ad 180 . . . 4 Sinus arcus 30 dimidio radio æqualis est; est enim radius æqualis chordæ arcus 60 (ex dem. cor. 4, prop. 5, cap. 3.) & ejusdem arcus sinus est dimidia chorda arcus dupli. Itaque in triangulo rectangulo latus oppositum angulo 30 est dimidia hypotenusa hujus trianguli. Nam si ACB = 30, erit BG = BC, & BD = $\frac{1}{2}$ BG. 5 Tangentes crescunt, crescentibus angulis a 0 usque ad 90, ita ut tangens arcus grad. 90. sit infinita, nam radius CH, in angulo recto HCA, non potest concurrere cum tangente . . . 6 Tangens arcus 45 æqualis est radio; nam si angulus ACB sit 45, triangulum rectangulum CAE erit isosceles, & AE = AC . . . 7 Sinus versus AD arcus qui minor est 90, æqualis est differentiæ inter radium CA & cosinum CD = BI. Præterea cosinus versus HI est differentia inter radium CH & sinum CI = BD; at sinus versus supplementi nempe Da, æqualis est summæ radii & cosinus . . . 8 Ob triangula rectangula similia CDB, CAE, CIB, CHK, erit CA : CD vel BI = AE : BD, nempe radius est ad cosinum ut tangens ad sinum. Deinde hæc alia habetur analogia CH : CI vel BD = HK : IB, hoc est, radius ad sinum ut cotangens ad cosinum. Tandem AE : CA = CH vel CA : HK; hoc est, tangens ad radium ut radius ad cotangentem . . . 9. Ex præcedentibus analogiis derivantur formulæ quarum ope sinus substituuntur tangentibus & viceversa. Sit R = 1, erit

$$\text{Sin.} = \text{Cos.} \times \text{Tang.} = \frac{\text{Cos.}}{\text{Cot.}}, \ \text{Cos.} = \text{Sin.} \times \text{Cot.} = \frac{\text{Sin.}}{\text{Tang.}}, \ \text{Tang.} = \frac{\text{Sin.}}{\text{Cos.}} = \frac{1}{\text{Cot.}}; \ \text{Cot.} = \frac{\text{Cos.}}{\text{Sin.}}, = \frac{1}{\text{Tang.}}, \ \text{Cot. A} \times \text{Tang. A} = 1 = \text{Cot. B} \times \text{Tang. B} \ldots.$$

10 In omni triangulo ſinus angulorum ſunt ut latera angulis oppoſita . Etenim triangulum circulo inſcribatur , ſingula latera ſunt chordæ arcus dupli , qui eſt menſura anguli oppoſiti . Quare dimidium latus eſt ſinus anguli oppoſiti ; ſed ſemiſſes ſunt inter ſe ut tota , ergo latera ſunt ut ſinus angulorum oppoſitorum . Hinc cum ſinus anguli recti ſit radius , & latus oppoſitum ſit hypotenuſa , erit in triangulo rectangulo radius ad hypotenuſam , ut ſinus anguli unius acuti ad latus eidem angulo oppoſitum . . . . 11 In triangulo rectangulo coſinus anguli unius acuti eſt ſinus anguli alterius ; ergo ſinus anguli unius acuti eſt ad ſuum coſinum ut latus huic angulo oppoſitum eſt ad latus alterum ; ſed ſinus eſt ad coſinum ut tangens ad radium ; ergo in triangulo rectangulo , tangens anguli unius acuti eſt ad radium ut latus huic angulo acuto oppoſitum , eſt ad latus alterum . 12 In triangulo quolibet ABC (Fig. 22.) hæc ſemper habetur analogia : majus latus AC eſt ad ſummam duorum aliorum laterum AB + BC , ut eorumdem laterum differentia AB — BC ad differentiam ſegmentorum

AE ,

AE, CE, quæ fiunt ducta ex angulo majori B in majus latus AC perpendiculari BE; nam si ex anguli vertice B, tanquam centro & radio qui sit minori lateri æqualis BG, describatur circulus GCD, producto latere AB in G, erit AG = AB + BC, & AP = AB − BC, atque ob CE = ED erit EA − CE = AD . . . 13

Dato sinu & cosinu arcus, invenitur sinus & cosinus arcus dimidii, atque etiam arcus dupli. Sit AM (Fig. 23.) arcus datus cujus sinus MP & cosinus CP, dati sint; ducta chorda AM, & ad eam demissa perpendiculari CQN, erit AQ vel MQ sinus, & CQ cosinus dimidii arcus; præterea agatur chorda MB, quæ erit CQ dupla ob triangula ACQ, ABM similia, atque ob AB duplam ipsius AC. Sed AP : AM = AM : AB; quare $\overline{AM}^2 = AB \times AP$, & $AM = \sqrt{\overline{AB} \times \overline{AP}}$, ideoque MQ sinus dimidii arcus $= \frac{1}{2} \sqrt{\overline{AB} \times \overline{AP}} = \sqrt{\frac{1}{2}\, \overline{AC} \times \overline{AP}}$. Simili modo cum sit AB : BM = BM : BP, erit $BM^2 = AB \times BP$, & $BM = \sqrt{\overline{AB} \times \overline{BP}}$, ergo CQ vel cosinus dimidii arcus $= \frac{1}{2} \sqrt{\overline{AB} \times \overline{BP}} = \sqrt{\frac{1}{2}\, \overline{AC} \times \overline{BP}}$.

Jam vero si invenire oporteat sinum & cosinum arcus dupli, sit AN arcus simplex, cujus sinus AQ vel MQ, & cosinus CQ, erit MP sinus & CP cosinus arcus dupli. Sed

Sed ob triangula rectangula AQC, AMP similia, erit CA : CQ = AM : MP. Quare si radius dicatur R, & arcus AN dicatur A, erit R : cos. A = 2. Sin. A : Sin. 2A. Tandem ob eorumdem triangulorum similitudinem, erit CA : AQ = AM : AP, vel R : Sin. A = 2. Sin. A : R − cos. 2A, ideoque RR − R × cos. 2A = 2. Sin. A x Sin. A, ac proinde cos. 2A =

$$\frac{RR - 2.\ Sin.\ A \times Sin.\ A}{R}$$

14 Datis sinu & cosinu duorum arcuum, inveniuntur sinus & cosinus eorumdem summæ, vel eorum differentiæ. Sint arcus AM, DN, (fig. 24.) quorum sinus & cosinus dati. Agatur chorda FD ad radium CM perpendicularis, & ex punctis D, F demittantur perpendiculares DQ, FP ad radium CA, quarum linearum una erit sinus summæ, altera autem sinus differentiæ arcuum AM, DM; ideoque recta CQ erit cosinus summæ, & CP cosinus differentiæ. Jam vero ducantur rectæ GK, FL, perpendiculares ad DQ, itemque rectæ MN, GI, perpendiculares ad radium CA, fiatque arcus AM = A, & arcus DM vel FM = B. His positis patet sinum DQ summæ arcuum esse = QR + DK = GI + DK, & sinum FP differentiæ eorumdem arcuum esse = GI − KL = GI − DK, cum sit DK = KL; quare inveniendæ sunt duæ illæ rectæ. Sed ob triangula CMN, CGI similia, erit CM : CG = MN : GI, vel R :

cos.

$$\text{cos. } B = \text{Sin. } A : GI = \frac{\text{Sin. } A \times \text{cos. } B}{R}.$$

Item ob triangula CMN, DGK similia, erit CM : CN = DG : DK, vel R : cos.

$$A = \text{Sin. } B : DK = \frac{\text{Sin. } B \times \text{cos. } A}{R},$$

factaque summa, erit DQ, vel Sin. (A +

$$B) = \frac{\text{Sin. } A \times \text{cos. } B + \text{Sin. } B \times \text{cos. } A}{R},$$

factaque subtractione, erit GI − DK vel FP = Sin. (A − B) =

$$\frac{\text{Sin. } A \times \text{cos. } B - \text{Sin. } B \times \text{cos. } A}{R}.$$

Simili modo (Fig. 24.) invenietur cosinus CQ summæ & cosinus CP differentiæ arcuum; inveniantur nempe rectæ CI & GK = PI, subtrahanturque ex CI, vel huic addantur. Jam vero ob triangula CMN, CGI similia, erit CM : CG = CN : CI, vel R :

$$\text{cos. } B = \text{cos. } A : CI = \frac{\text{cos. } A \times \text{cos. } B}{R}.$$

Itemque ob triangula DGK, CMN similia, erit CM : MN = DG : GK, vel R :

$$\text{Sin. } A = \text{Sin. } B : GK = \frac{\text{Sin. } A \times \text{Sin. } B}{R};$$

ideoque CQ, vel Cosinus (A + B) =

$$\frac{\text{Cos. } A \times \text{Cos. } B - \text{Sin. } A \times \text{Sin. } B}{R}, \&$$

CP vel cos. (A − B) =

Cos.

$\frac{\text{Cos. A} \times \text{Cos. B} + \text{Sin. A} \times \text{Sin. B}}{R}$ ... Y5

Cum ſit $DQ + FP = 2GI$, & $GI = \frac{\text{Sin. A} \times \text{Cos B}}{R}$, evidens ſit eſſe $DQ = \frac{2.\text{Cos. B} \times \text{Sin. A.}}{R} - FP$, ideoque $FP = \frac{2.\text{Cos. B} \times \text{Sin. A}}{R} - DQ$. Simili modo cum ſit $DQ - FP = 2DK = 2KL$, & præterea DK vel $KL = \frac{\text{Sin. B} \times \text{Cos. A}}{R}$, erit $DQ = \frac{2.\text{Sin. B.} \times \text{Cos. A}}{R} + FP$, ac proinde $FP = DQ - \frac{2.\text{Sin. B} \times \text{Cos. A}}{R}$.

Tandem cum rectæ CQ, CI, CP ſe mutuo excedant eadem quantitate IQ vel GK, erit $CQ + CP = 2CI$; ſed CI (ex dem.) $= \frac{\text{Cos. A} \times \text{Cos. B}}{R}$. Ergo $CQ + CP = \frac{2.\text{Cos. A} \times \text{Cos. B}}{R}$, ac proinde $CQ = \frac{2.\text{Cos. A} \times \text{Cos. B}}{R} - CP$, ideoque $CP = \frac{2.\text{Cos. A} \times \text{Cos. B}}{R} - CQ$. Quare $CP -$

CQ

CQ = 2IQ = 2GK. Sed GK = $\frac{Sin.A \times Sin.B}{R}$ ergo CP = $\frac{2.Sin.A \times Sin.B}{R}$ + CQ. Simili modo CQ = CP − $\frac{2.Sin.A \times Sin.B}{R}$ .... 16 Sint tres arcus circuli in progressione arithmetica, & dati sint sinus & cosinus unius arcus extremi atque etiam arcus medii: præterea dati sint sinus & cosinus differentiæ communis, habebitur sinus arcus alterius extremi, multiplicando duplum cosinum differentiæ communis per sinum arcus medii, & ex producto per radium diviso dematur sinus alterutrius arcus extremi, residuum erit sinus extremi alterutrius. Est enim DQ = $\frac{2.Cos.B \times Sin.A}{R}$ − FP vel PF = $\frac{2.Cos.B \times Sin.A}{R}$ − DQ ....17 Iisdem positis conditionibus, si multiplicetur cosinus arcus medii per duplum sinum differentiæ communis, habebitur sinus arcus majoris, si huic producto per radium diviso addatur sinus arcus minoris; si autem ex eodem producto dematur sinus arcus majoris, residuum erit sinus arcus minoris; cum sit DQ = $\frac{2.Sin.B \times Cos.A}{R}$ + FP, &

FP

$$FP = DQ - \frac{2.Sin.B \times Cos.A}{R} \quad \ldots 18$$

Positis ut ante arcubus AF, AM, AD, in progressione arithmetica, si multiplicetur duplus cosinus arcus medii per cosinum differentiæ communis, habebitur cosinus arcus unius extremi, demendo ex hoc producto per radium diviso cosinum extremi alterius . . . 19 Cæteris manentibus ut ante, multiplicetur duplus sinus arcus medii per sinum differentiæ communis, huic producto addatur cosinus arcus majoris, habebitur cosinus arcus minoris; si vero idem productum semper divisum per radium, dematur ex cosinu arcus minoris, habebitur cosinus arcus majoris. Est enim $CP = \frac{2.Sin.A \times Sin.B}{R} + CQ$ & $CQ = CP - \frac{2.Sin.A \times Sin.B}{R}$.

SCHOL. Ex hactenus demonstratis facile construuntur sinuum tabulæ. Dato enim sinu & cosinu anguli, inveniuntur sinus & cosinus angulorum omnium qui decrescunt vel crescunt in ratione dupla. Dato sinu graduum 30, inveniri possunt sinus graduum 15, deinde $7\frac{1}{2}$, postea $3\frac{1}{4}$, & ita deinceps sinuum semisses, progrediendo usque ad 12 operationem, nempe usque ad 52″ 44‴.

44'''' 3''''' $\frac{1}{4}$, qui quidem ſinus ſine errore ſenſibili cum arcu confunditur. Quia vero ſinus illi minimi ſunt arcubus proportionales, dici poterit: Ut arcus ille eſt ad ſuum ſinum, ita arcus 1' eſt itidem ad ſuum ſinum. Dato autem ſinu arcus 1', invenientur ſinus arcuum 2', 3', 4' & ita deinceps uſque ad 30; tandem a 30, uſque ad 60, & a 60 uſque ad 90 progredi licebit. In exemplum adhibetur arcus 30 cujus ſinus dimidio radio æqualis eſt, atque hinc ſtatim colligitur & ex quadrato hypotenuſæ laterum quadratis æquali, coſinum eſſe $\frac{1}{2}\sqrt{3}$, hoc eſt dimidio radio per $\sqrt{3}$ multiplicato, poſito radio $= 1$.

Neque difficilius erit angulorum calculum ad tangentes revocare; cum (ex dem.) ſinus & coſinus per tangentes & cotangentes exprimi poſſint. Hæc pauca ſatis ſunt ad intelligendam vulgarium tabularum conſtructionem; in iis nempe tabulis angulorum ſinus & tangentes repræſentantur, quarum quidem commoditas eſt maxima, præſertim ſi logarithmos adjunctos habeant, quorum facilis uſus patet ex logarithmorum doctrina antea explicata.

SE-

SECTIO II.

De Geometria superficierum.

CAPUT I.

De præcipuis planarum superficierum proprietatibus.

PROP. I. *Tria puncta quæ in eadem recta non jacent, plani positionem determinant.* Id patet ex definitione ipsius plani. Et quidem per tria puncta duci potest planum, quod evidens est; illud vero planum unicum esse manifestum est. Ponamus enim planum aliud, quod cum primo in tribus punctis congruat, in aliis autem ab ipso deflectat, jam eadem linea recta quæ primum planum tangeret, alteri plano aptari perpetuo non posset, neque secunda superficies illa foret omnium intra eosdem terminos ductarum brevissima; quod est contra definitionem plani. Ergo per tria puncta unicum planum duci potest, ac proinde constans est ac determinata positio plani per data tria puncta transeuntis.

COR. I. Duæ rectæ se invicem secantes, sunt in eodem plano. Nam punctum intersectionis & punctum quodlibet aliud in binis lineis pro arbitrio sumptum, tria sunt puncta in directum non posita, quæ proinde determinant positionem plani in quo jacent duo utriusque lineæ puncta, ac proinde & totæ binæ lineæ (ex def.)

COR. II. Si duæ rectæ jacentes in eodem pla-

plano tertia recta secentur, recta secans in eodem quoque jacebit plano. Nam duo ejusdem lineæ puncta, duæ scilicet intersectiones, sunt in eodem plano. Si autem ponamus duas rectas se mutuo secare, patet in hoc casu demonstrationem non valere, nisi tertia linea secans extra punctum intersectionis transeat; alioquin unicum haberetur punctum, quod rectæ positionem non determinat.

COR. III. Duorum planorum intersectio est linea recta. Nam duorum planorum intersectio est linea, cujus singula puncta jacent in utroque plano. Patet autem tria puncta duobus planis communia esse non posse, nisi jaceant in directum. Cum enim tria puncta, quæ non sunt in eadem recta, positionem plani determinent, si tria puncta in directum non posita duobus planis communia esse possent, jam tria puncta positionem plani non determinarent. Quare planorum duorum intersectio est linea recta.

COR. IV. Recta ad planum perpendicularis, insistit quoque perpendiculariter ad rectas singulas in eodem plano jacentes, & per extremitatem perpendicularis transeuntes. Etenim ponamus rectam illam ad planum perpendicularem non insistere perpendiculariter ad aliquam ex prædictis lineis, jam linea illa infra planum deprimitur vel attollitur supra idem planum, ac proinde non jaceret in eodem plano (quod est contra hypoth.)

COR. V. Duæ rectæ ad idem planum perpendiculares vel æqualiter inclinatæ, sunt inter se parallelæ, & contra. Etenim recta-

rum

rum illarum extremitates communi recta in plano jungantur, duæ illæ lineæ ad planum perpendiculares vel æqualiter inclinatæ, erunt quoque perpendiculares vel æqualiter inclinatæ ad eandem lineam jungentem; est enim in eodem plano. Quare (ex parallelarum def.) rectæ illæ erunt parallelæ, & viceversa.

PROP. II. *Duo plana sibi mutuo inclinata easdem habent proprietates, quas in rectis ad se invicem inclinatis demonstravimus.* Ponamus planum aliquod A immobile, in quo jaceat planum aliud B lineis rectis terminatum, qualia sunt polygona rectilinea; hæc duo plana utpote omni crassitie destituta in unum coalescunt planum. At sit planum B, quod revolvi intelligatur circa latus aliquod plano A fixum perpetuo manens, totum plani motum sibi facile quisque repræsentabit. Et quidem 1 ab ipso motus initio nihil duobus planis manebit commune præter rectam, circa quam planum B revolvitur, quæ proinde est utriusque plani intersectio . . . . 2 Planum illud singulos percurret inclinationis gradus, si tamdiu convertatur, donec ad oppositam plani A partem perveniat . . . . 3 Planum revolvens plano immoto fiet perpendiculare, ubi ad eum pervenerit situm in quo non magis pendeat ex una parte quam ex alia . . . . 4 Singulos inclinationis gradus metietur arcus circuli cujus centrum perpetuo manebit in communi planorum intersectione. Quia vero centrum in ipso circuli plano jacet, necessum est hujus arcus centrum esse in linea recta cujus revolutione generatur

ipsum

ipsum arcus planum . . . . 5 Si concipiatur linea quædam sublimis, cui perpendiculariter affixa sit recta alia, hæc recta planum describet, interea dum linea sublimis circa seipsam convertitur in eodem perpetuo manens loco. Si autem duæ lineæ sibi invicem non forent perpendiculares, jam figura revolvendo descripta, plana non foret, sed ex una parte convexa & ex altera concava, ut patet. Quare ex ipsa plani formatione evidens est revolutione rectæ planum describi non posse, nisi recta revolvens sit ad lineam in qua revolvitur perpendicularis . . . . 6 Centrum arcus in quo sumuntur gradus inclinationis plani unius ad aliud, positum est in perpendiculari ex puncto quolibet arcus ad planorum intersectionem ducta. Quare si describatur semicirculus cujus centrum sit in linea duobus planis communi, & cujus planum sit ad planum immotum perpendiculare, per hujus semicirculi gradus metiri licebit omnes plani mobilis inclinationes. Quare generatim plana duo ad se invicem inclinata easdem habent proprietates, quæ in mutua linearum inclinatione demonstrantur.

COR. I. Planum plano occurrens vel duos angulos rectos facit vel duobus rectis æquales. (Prop. 1, c. 1.)

COR. II. In planorum intersectione æquales sunt anguli ad verticem oppositi. (Cor. 2, Prop. 1, c. 1.)

COR. III. Si plana quotlibet eamdem habent communem intersectionem, summa angulorum omnium est 360. (Cor. 1, Prop. 1, cap. 1.)

COR.

COR. IV. Ex puncto dato extra planum vel intra planum, unica perpendicularis ad planum duci potest. (Cor. 4, Prop. 1, cap. 1.)

COR. V. Distantia puncti alicujus a plano dato, est perpendicularis ex puncto dato ad planum ducta (ex def.).

COR. VI. Planum secans duo vel plura plana parallela efficit angulos alternos externos æquales, item æquales angulos alternos internos. Præterea angulus internus alterius interni supplementum est, atque etiam angulus externus est supplementum alterius (Prop. 2, cap. 1.).

COR. VII. Si duo aut plura plana parallela alio plano secentur, communes intersectiones erunt parallelæ. Si enim non sint parallelæ, sibi occurrere possunt, ac proinde & plana ipsa in quibus hæ lineæ jacent, ideoque plana non forent parallela, quod est contra hyp.

C A P U T II.

De Superficierum mensura.

PROP. I. *Superficies parallelogrammi Rectanguli aqualis est producto ex basi in altitudinem.* Sit parallelogrammum rectangulum ABCD (Fig. 25.) cujus altitudo AD certum contineat pedum numerum E G, 7, basis autem AB octo contineat; divisum intelligi poterit parallelogrammum in 7 superficies ut DM: quæ singulæ continent octo minores superficies quadratas, si-

ve

ve octo pedes *quadratos*, ut vocant. Quare habebitur parallelogrammi totius superficies, si octo pedes quadrati qui in prima superficie continentur toties sumantur, quot sunt æquales superficies ut DM, ac proinde superficies tota parallelogrammi erit 7×8, nempe 56 pedum quadratorum. Evidens est in hac demonstratione fingi posse alium quemlibet partium numerum, atque eadem valet demonstratio etiamsi altitudo & basis parallelogrammi ponantur *incommensurabiles*, ut patet ex Prop. 1, cap. 4.

COR. I. Si parallelogrammum BD per diagonalem dividatur, habebuntur triangula duo rectangula æqualia; quorum proinde superficies utpote dimidia parallelogrammi, erit dimidium productum ex basi in altitudinem.

Eadem est demonstratio pro triangulo quolibet etiam non rectangulo. Sit enim triangulum CAB (Fig. 26.) non rectangulum, ex puncto A demittatur perpendicularis AD, compleatur rectangulum FCBE, erit triangulum CAD dimidium rectanguli FACD, & triangulum DAB dimidium rectanguli DABE, quare ut ante, superficies trianguli est dimidium productum ex basi in altitudinem.

Idem patet etiamsi perpendicularis EB trianguli CED, cadat extra basim. Nam triangulum DEB est dimidium rectanguli DAEB, & triangulum CEB est dimidium rectanguli DAFB, & ergo triangulum CD, seu CEB

$$- DEB = \frac{1}{2} CB \times AD - \frac{1}{2} DB \times$$

$$AD = \frac{GB - DB}{2} \times AD = \frac{1}{2} CD \times AD,$$

ac proinde trianguli cujuslibet superficies æqualis est dimidio producto ex basi in altitudinem.

COR. II. Cum parallelogrammum quodlibet dividi possit in duo triangula æqualia, quæ ipsam habent parallelogrammi basim eandemque altitudinem, patet generatim superficiem parallelogrammi cujuscumque esse productum ex basi in altitudinem.

COR. III. Quotlibet triangula ideoque etiam quotlibet parallelogramma inter easdem parallelas & super eadem vel æquali basi constituta, sunt æqualia. Ergo etiam triangula inter easdem parallelas cum parallelogrammis constituta & super eadem basi sunt parallelogrammorum dimidia ac proinde etiam inter se æqualia. Ex hac propositione pendet vulgaris demonstratio theorematis quod alio modo jam demonstravimus; nempe *quadratum hypotenusæ in triangulo rectangulo, æquale esse quadratis laterum*. Hanc vero geometriæ fecunditatem totiusque doctrinæ geometricæ conjunctionem, variis exemplis tyronibus sæpe ostendere debet peritus magister.

COR. IV. Cum triangula sint ut dimidium productum ex basi in altitudinem, erunt etiam ut productum totum; hoc est, triangulorum superficies sunt in ratione composita basium & altitudinum; ac proinde, si bases faciunt æquales, triangula erunt inter se ut altitudines; si autem altitudines fuerint æquales, erint inter se ut bases.

COR.

COR. V. Si altitudo trianguli unius sit ad trianguli alterius altitudinem ut basis secundi trianguli ad basim primi, hoc est, si bases sint in ratione inversa altitudinum, triangula sunt æqualia. In hoc enim casu habetur proportio in qua productum extremorum æquale est producto mediorum; hoc est, productum ex altitudine primi trianguli in basim æquale est producto ex altitudine secundi trianguli in suam basim, ideoque triangula sunt æqualia: & viceversa si triangula sunt æqualia, erunt bases in ratione inversa altitudinum.

COR. VI. In triangulis similibus superficies sunt in ratione duplicata laterum homologorum. Etenim cum triangula sint in ratione composita basium & altitudinum, atque (ex hyp.) sint similia, loco basis substitui poterit altitudo & contra. Quare triangula similia sunt ut quadrata laterum homologorum.

PROP. II. *Superficies polygoni regularis æqualis est dimidio producto ex perpendiculari per centrum polygoni ad latus unum demissa, in polygoni circumferentiam.* Etenim triangula omnia, in quæ resolvitur polygonum regulare, sunt æqualia (Prop. 5, c. 3.) ideoque eandem habent altitudinem CI (Fig. 11). Sed superficies polygoni regularis $= CI \times \frac{1}{2} AB + C \times \frac{1}{2} BD + CI \times \frac{1}{2} DE$ &c. Quare cum $AB + BD + DE$ &c. sit tota polygoni peripheria, patet superficiem totam polygoni æqualem esse producto ex

altitudine CI in dimidiam polygoni peripheriam, vel dimidio producto ex peripheria polygoni in altitudinem.

COR. I. Superficies circuli æqualis est dimidio producto ex radio in circumferentiam.

COR. II. Si ex centro circuli ad circumferentiam ducantur radii duo, pars circuli duobus radiis, & arcu comprehensa *Sector* dicitur; evidens autem est hujus sectoris superficiem æqualem esse dimidio producto ex arcu in radium.

PROP. III. *Figurarum similium superficies sunt in ratione duplicata laterum homologorum.* Etenim triangula homologa in quæ reducuntur figuræ similes, sunt earundem figurarum partes similes (Prop. 4, c. 4), ac proinde triangula homologa erunt ut polygona tota, sed triangula similia sunt in ratione duplicata laterum homologorum; ergo in eadem etiam ratione sunt figuræ similes quælibet.

COR. I. Superficies circulorum sunt ut quadrata radiorum vel diametrorum.

SCHOL. Ex propositionibus præcedentibus nota quidem est ratio quam habent variæ circulorum peripheriæ atque etiam illorum superficies ad suos radios; at ratio accurata inter circuli circumferentiam illiusque diametrum nondum definiri potuit, ita ut magnitudine diametri numeris expressa, numeris accurate exprimi non possit circuli circumferentia, ac proinde nec ipsa circuli superficies. In hoc sensu intelligi debet quod vulgo dicitur, nondum scilicet inventam esse circuli *quadraturam*, quod quidem *quadratu-*

tura nomen adhiberi solet eo quod *quadratum* sit cujuslibet superficiei communis mensura, ut jam demonstravimus. Eo igitur reducti sunt Geometrarum conatus ut ad illam quadraturam proxime & quantum voluerint accedant; hanc tamen accurate non attingant. Qua ratione autem hanc *approximationem* tentare soleant Geometræ ex ipsis elementis licebit intelligere. Divisus concipiatur circulus primo in quatuor partes æquales, deinde in 8, in 16, in 32, in 64, in 128 &c. prout cuique libuerit, & concipiamus per ea divisionum puncta tangentes, & chordas respective ductas, habebuntur polygona duo quorum unum *inscriptum* circulo; alterum autem *circumscriptum*; quæ quidem ambo constant triangulis æqualibus. Porro, per methodos explicatas, in his triangulis haberi semper poterunt bases quæ in primo casu sunt circulorum chordæ, in altero autem tangentes, ac proinde omnium quoque chordarum & tangentium summa innotescet, hoc est perimeter polygoni inscripti, quæ circuli circumferentia proxime minor est, & polygoni circumscripti perimeter quæ proxime major est, ita ut defectus vel excessus, quantum cuique placuerit, tenuis sit & intra angustissimos limites contrahatur. Hac methodo Archimedes invenit diametrum ad peripheriam esse in ratione 7 ad 22 ita ut exiguus omnino sit peripheriæ sic inventæ excessus supra veram. Hæc eadem ratio subtilius ab aliis quæsita est & statuitur ut 1 ad 3, 14159265 &c. perductis decimalibus numeris usque ad notas 127; quæ quidem

approximatio est fere infinita ; sed omnium vulgatissima & elegantissima ratio diametri ad peripheriam ea est quam exprimunt numeri 113, & 355. Quare data circuli diametro habebitur peripheria, si hæc fiat proportio 113 est ad 355 ut diameter data ad peripheriam quæsitam ; hæc multiplicetur per quartam diametri partem, habebitur superficies circuli sive, ut vocant, *area*. Hæc pauca dicta sint de ratione diametri ad peripheriam, sive de quadratura circuli quam audacter se invenisse non raro jactitant viri geometriæ imperiti, qui ipsum quidem quæstionis statum ut plurimum non intelligunt.

Simili methodo figura quælibet curvilinea generatim dividi potest in partes rectilineas. Aliquando per geometriam sublimiorem figuræ curvilineæ area accurate haberi potest, sed commodissima & generalis est praxis qua figuræ curvilineæ circumferentia in minimas partes & *physice* rectilineas dividitur & deinde figuræ totius area investigatur, ut fieri solet in polygonorum mensura.

Porro dum superficierum magnitudinem *pedibus quadratis*, aut alia qualibet mensura exprimimus, id nequaquam haberi debet unquam contrarium iis quæ de numerorum *concretorum* multiplicatione demonstravimus in arithmetica; non enim pedes per pedes multiplicantur. Ita dum parallelogrammi superficies invenitur, multiplicando basim per altitudinem, hac operatione hoc unum significant Geometræ; si nempe habeantur parallelogramma duo, adhibeaturque quantitas *linearis* quælibet *a* pro communi ba-

sium

sium & altitudinum mensura, & sit B numerus integer aut fractus, rationalis vel irrationalis exprimens quoties basis parallelogrammi unius contineat quantitatem *a*; atque H exprimat quoties altitudo ejusdem parallelogrammi eandem contineat mensuram. Item sit *b* numerus exprimens quoties mensura *a* contineatur in basi alterius parallelogrami, *h* autem exponat quoties altitudo parallelogrammi ejusdem contineat mensuram *a* parallelogrammorum illorum superficies erunt inter se ut productum ex duobus numeris B, H, ad productum ex numeris duobus *b*, *h*; hæc est genuina hujus operationis notio; quare dum dicitur parallelogrammi superficiem æqualem esse producto ex basi in altitudinem, *æqualitas* proprie dicta intelligi non debet, sed mera proportio. Hæc eadem observatio ad physicam sæpe transferri debet, ubi de spatii velocitatis & temporis mensura sermo est.

SECTIO III.

De Geometria Solidorum.

CAPUT I.

De Solidorum genesi & proprietatibus.

PROP. I. *Solidorum rectilineorum genesim explicare.* Si figura rectilinea AGR supra immotam rectam AE (Fig. 27.) motu sibi semper parallelo feratur; solidum AGROFE inde genitum *prisma* dicitur; & *re-*

ctum vocatur, si AE describenti plano recta fuerit, sin minus, *obliquum*. Si planum describens fuerit parallelogrammum, solidum inde genitum dicitur *parallelepipedum* . Si autem planum describens sit quadratum, solidum *cubus* nuncupatur . Basis solidi seu planum describens potest esse polygonum quodlibet, & solidum inde genitum *prismatis* nomen retinet, si e singulis polygoni angulis extra planum consurgant lineæ æquales & parallelæ terminantes rectilineam solidi faciem . At si rectæ lineæ in apicem coeunt, solidum *pyramis* dicitur (Fig. 28).

COR. I. Prisma igitur opposita latera AGR, EFO, æqualia habet, similia & parallela; cum AGR fluendo per AE, motu sibi semper parallelo, tandem congruat cum EFO . Præterea dum planum AGR motu sibi parallelo describit prisma AGROFE, latera AG, GR, RA motu sibi semper parallelo describunt parallelogramma AEFG, GFOR, ROEA, ac proinde prisma tot parallelogrammis circumcirca terminatur, quot sunt latera plani describentis.

COR. II. Parallelepipedum sex parallelogrammis terminatur; cubus autem sex quadratis æqualibus . Nam præter facies quatuor parallelo laterum motu genitas, sunt etiam facies duæ oppositæ parallelo basis motu descriptæ . Illa autem basis in primo casu est parallelogrammum, in altero autem quadratum.

COR. III. In pyramide si omnia latera basi sunt æqualia inter se & latera rectilinea ipsius pyramidis pariter inter se æqualia

lia, erunt omnes facies triangula isosceliæ æqualia.

COR. IV. Quævis sectio prismatis vel pyramidis facta plano basi parallelo, est figura prorsus similis basi. Etenim sectionis parallelæ singula latera sunt singulis lateribus basis parallela, cum sint intersectiones planorum parallelorum cum iisdem planis. Quare singuli anguli homologi erunt æquales (Prop. 2, cap. præc.) ac proinde sectio basi similis est.

COR. V. In prismate sectio basi parallela, ipsi basi æqualis est, in pyramide autem latera sectionis homologa sunt minora in ratione distantiæ sectionis a vertice ad distantiam basis ab eodem. In prismate patet æqualitas, cum facies sint parallelogramma; ac proinde latera sectionis homologa æqualia sunt lateribus basis, ideoque sectio prorsus æqualis est basi. In pyramide proportio etiam patet; nam ob sectionem parallelam, in unaquaque facile habebuntur triangula duo similia.

COR. VI. Omnia prismata collata inter se atque etiam omnes pyramides inter se comparatæ, si super basibus æqualibus & inter eadem plana parallela constituantur, spatia solida respective æqualia comprehendunt. Secentur enim quotcumque planis, quæ sint basibus parallela; sectiones unius prismatis vel pyramidis æquales semper erunt sectionibus respondentibus alterius. Nam in prismate omnes erunt æquales eidem basi; in pyramide erunt ipsi basi similes; & singula latera in una pyramide erunt

ad latera homologa in pyramide altera in eadem data ratione, nempe in ratione distantiæ basis a vertice ad sectionis distantiam ab eodem vertice, quæ quidem ratio eadem est, ut patet; cum pyramides terminentur plano, basium & sectionum planis parallelo. Porro solida illa concipi possunt tanquam composita ex iis omnibus sectionibus, quarum singulæ cum singulis æquales sint, erunt & ipsa solida æqualia.

COR. VII. Pyramides basium æqualium in eumdem apicem desinentes, vel eamdem utcumque altitudinem habentes, sunt æquales. Nam per communem verticem ductum intelligatur planum basium planis parallelum: pyramides semper erunt super æqualibus basibus & in iisdem planis parallelis. Similiter si bases in eodem plano constituantur, vertices in eadem altitudine ad idem planum basibus parallelum terminabuntur.

COR. VIII. Si pyramides eamdem habeant altitudinem, erunt inter se, ut bases. Etenim basis major divisa intelligatur, si fieri possit, in partes basi minori æquales, concipi poterit pyramis major tanquam composita ex diversis pyramidibus quæ basim habeant basi minori æqualem; sed pyramides illæ singulæ erunt minori pyramidi æquales, ergo pyramis major est ad minorem ut pyramidum æqualium numerus in majori pyramide ad pyramidem minorem, hoc est, pyramides illæ sunt inter se ut bases.

At si basis major minorem basim non contineret accurate, sed tamen habeant aliquam communem mensuram; dividi fingantur

tur bases in partes huic mensuræ communi æquales, jam pyramides duæ tot alias continebunt pyramides æquales quot sunt in utraque pyramide partes communes, ac proinde pyramides sunt etiam ut bases.

Tandem si pyramidum bases, forent incommensurabiles, adhibeatur aliqua mensura, quæ minuatur in infinitum, donec fiat utriusque basis mensura communis, quemadmodum dictum est de figurarum similitudine, eodem modo patet in hoc etiam casu pyramides esse inter se ut bases.

PROP. II. *Solidorum curvilineorum genesim explicare*. Si recta sublimis motu sibi semper parallelo circuli circumferentiam radat, figura solida hoc motu genita *cylindrus* dicitur. At si recta per aliquod punctum fixum & sublime perpetuo transiens, altera extremitate radat circuli circumferentiam, solidum hoc motu genitum *conus* vocatur. Utriusque figuræ *basis* vocatur circulus cujus circumferentiam recta percurrit. Patet cylindrum duobus circulis, conum autem circulo unico terminari. Recta per utriusque circuli centrum in cylindro transiens, in cono autem per basis centrum ipsumque coni verticem *axis* dicitur. Si axis sit perpendicularis basi, cylindrus vel conus *rectus* solidum genitum appellatur; secus autem *obliquus* vocatur. Si autem basis fuerit quævis alia curva, solidum dicitur *cylindricum* vel *conoidicum*. Figura 29 refert cylindrum rectum, figura autem 30 conum rectum repræsentat. Si semicirculus AHB (Fig. 31) circa immotam diametrum AB in orbem

ducatur, donec ad priſtinum ſitum redeat, ſolidum inde genitum *ſphæra* dicitur.

COR. I. Si baſis priſmatis, vel pyramidis, aucto numero laterum, & imminuta magnitudine in infinitum, abeat in curvam continuam, priſma abit in ſolidum cylindricum, pyramis in conoidicum. Item priſma cujus latera ſunt perpendicularia baſi, mutatur in cylindrum rectum; pyramis vero in qua baſis latera ſunt æqualia, & diſtantiæ a vertice æquales, abit in conum rectum.

COR. II. Si ſphæra plano quovis ſecetur, ſectio erit circulus, qui erit omnium maximus, ſi ſectionis planum tranſeat per centrum ſphæræ, ac deinde erit major vel minor prout planum ſectionis magis vel minus recedet a centro ſphæræ. Sit enim ſectio FIH, ad cujus planum ducatur diameter perpendicularis AB, quæ plano ſecanti occurrat in E. Si punctum E congruat cum centro C, patet rectas EI fore radios ſphæræ. Si autem cadat extra, in triangulis CEI, CEF, anguli ad E erunt recti, latus CE commune & baſis CI = CF; quare quodvis latus CI = EF ac proinde in utroque caſu ſectio erit circulus cujus centrum E; illud vero centrum in primo caſu coincidet cum centro ſphæræ. Patet autem ob angulum rectum in E, radium circuli EF, ſemper minorem fore radio ſphæræ CF, niſi radii illi congruant abeunte E in C. Evidens etiam eſt eo minorem fore chordam HF, nempe circuli diametrum, quo major fuerit diſtantia CE.

COR.

COR. III. Sphæra considerati potest tanquam composita ex pyramidulis æqualibus numero infinitis & infinite parvis, quarum bases sunt in ipsa sphæræ superficie, vertex autem communis est ipsum sphæræ centrum.

SCHOL. In capite præcedenti ubi prismata & pyramides inter se comparavimus, aliqua dubitatio suboriri posset, quod nempe solida e superficiebus composita habere videamur. Et re quidem vera linea producitur motu continuo puncti, superficies motu continuo lineæ, solidum motu continuo superficiei; at linea non ex punctis, sed ex lineis, superficies ex areolis, non ex lineis, solidum ex spatiolis solidis, non ex superficiebus componitur. Neque genuinam linearum, superficierum & solidorum notionem tyronibus proponunt nonnulli magistri, qui lineas tanquam e punctis, superficies ex lineis, solida ex superficiebus composita repræsentant. Itaque dum (in cor. 6, cap. præc.) ex sectionum æqualitate prismatum & pyramidum æqualitatem concludimus, id non debet intelligi quasi prismata & pyramides ex sectionibus planis componi velimus; nam loco sectionis unius considerari possent sectiones duæ infinite proximæ; quarum (in cit. coroll.) eadem foret distantia sive altitudo, ut patet ex planorum parallelismo. Igitur minima solida duabus sectionibus infinite vicinis comprehensa forent æqualia in casu proposito, quare communem altitudinem negligere licuit solamque sectionum æqualitatem considerare; id vero facere

num-

nunquam licet nisi præter sectionum æqualitatem, æquales etiam sint binarum quarumcumque indefinite proximarum distantię. Porro evidens est, hanc methodum ad *exhaustionum* methodum sæpius explicatam reduci, ac proinde ad severitatem geometricam esse omnino compositam.

CAPUT II.

De Solidorum mensura.

PROP. I. *Prismatis cujus latera rectilinea sunt basi perpendicularia superficiem metiri.* Singulæ prismatis facies in hoc casu sunt rectangula sub singulis lateribus basis singulisque prismatis lateribus rectilineis contenta: ideoque omnium hujusmodi rectangulorum summa est tota basis perimeter in latus rectilineum ducta. Quare prismatis superficies, demptis basibus, est productum ex primetro basis in unum e lateribus rectilineis. Huic producto addatur dupla basis superficies, habebitur superficies tota prismatis.

COR. I. Cum sex quadratis æqualibus terminetur cubus, habebitur tota cubi superficies, si quadrati unius superficies sumatur. Quia vero parallelepipedum sex terminatur superficiebus, quarum duæ quælibet oppositæ sunt æquales, inveniantur tres inæquales superficies illarumque summa bis sumatur, habebitur tota parallelepipedi superficies.

COR. II. Cum basis cylindri considerari pos-

possit tanquam polygonum regulare ex lateribus numero infinitis & infinite parvis compositum, cylindrus haberi poterit tanquam prisma *infinitilaterum*, cujus proinde superficies habebitur, si tota basis perimeter seu circuli circumferentia ducatur in altitudinem, & producto addatur dupla basis sive circuli superficies.

PROP. II. *Pyramidis cujus latera omnia sunt aequalia, & basis latera sunt etiam aequalia, superficiem invenire.* Cum facies omnes pyramidis in hoc casu sint triangula isoscelia aequalia, erit omnium triangulorum summa aequalis dimidio producto ex tota basis perimetro in perpendiculum ex vertice pyramidis demissum ad latus quodlibet basis; nam triangulum quodlibet aequatur dimidio producto ex latere basis ducto in suum perpendiculum. Haec autem singula perpendicula sunt aequalia; habebitur ergo in hoc casu pyramidis superficies, dempta basi.

COR. I. Conus est pyramis *infinitilatera*, ac proinde coni recti superficies aequalis est dimidio producto ex circumferentia basis in longitudinem sive latus coni, dempta tamen basi.

COR. II. Si pyramis plano basi parallelo truncata ponatur, facies omnes reliquae pyramidis versus basim abeunt in trapezia aequalia; haec autem trapezia singula dividi possunt in triangula duo aequalia quorum bases sunt sectionis & basis latera, altitudo autem communis est ipsarum basium distantia perpendicularis. Quare singulorum angu-

gulorum mensura, est dimidium productum ex singulis basibus in ipsam basium distantiam, ac proinde superficies pyramidis truncatæ æquatur dimidio producto ex summa perimetri basis & sectionis in distantiam perpendicularem basium.

COR. III. Si conus rectus plano basi parallelo truncatus ponatur, coni hujus truncati versus basim superficies æqualis est dimidio producto ex peripheriarum summa in coni truncati longitudinem sive latus. Res autem aliter obtinetur, si inveniatur circulus DE (Fig. 30.) cujus peripheria æqualis sit semisummæ peripheriarum BC, GM. Sumatur nempe punctum D medium inter B, G, ducaturque recta DE parallela sectioni BC, hæc erit diameter circuli quæsiti. Etenim ductis perpendicularibus Bf, Dh, erit ob triangulorum DBf, DGh similitudinem Bf: Df = Dh: Gh, ac proinde ob Bf = Dh, erit etiam Df = Gh; quare eadem est differentia inter diametros BC, DE, quæ est inter diametros DE, GM; illa nempe differentia est dupla rectæ Df vel Gh, ideoque recta DE est media proportionalis arithmetica inter BC, GM, seu quod idem est, diameter DE æqualis est semisummæ diametrorum BC, GM. Sed circuli utpote figuræ similes suas habent peripherias diametris proportionales (Schol. cap. 3.). Ergo circumferentia circuli diametro DE descripti, est media proportionalis arithmetica inter circumferentias diametris BC, GM descriptas. Habebitur ergo coni truncati BCGM superficies, si multiplicetur

cir-

circuli medii DE circumferentiæ per latus coni BG.

COR. IV. Si concipiatur cylindrus rectus KQLM (Fig. 32.) circumscriptus sphæræ, habens pro axe diametrum AB, superficies segmenti sphæræ, HAF, æqualis erit superficiei cylindri QNRK, & area totius sphæræ æqualis areæ totius cylindri, demptis basibus. Etenim concipiatur particula quævis Ff circuli *genitoris* ita parva ut infinite accedat ad lineam rectam, productaque Ff usque ad AB in C, recta FfG generabit superficiem coni recti, & Ef superficiem coni truncati cujus mensura erit ipsa Ef ducta in semisummam peripheriarum, quarum radii sunt EF, ef; ducta autem PO, ita ut peripheria radio PO descripta æqualis sit semisummæ peripheriarum prædictarum, erit coni truncati superficies ut recta Ff ducta in circumferentiam cujus radius est OP. Jam vero ob triangula rectangula similia Gef, GEF, GPO, OPC, erit Ee vel Nn: Ff = GE: GF = GP: GO = PO: CO vel EN; ob EN = BL = CO; ideoque Nn x EN = fF x PO, ac proinde cum peripheriæ sint ut radii, erit productum ex Nn in peripheriam radio EN descriptam æquale producto ex fF, in peripheriam radio PO descriptam. Primum autem productum exprimit aream genitam ab Nn; alterum vero aream genitam ab Ff. Quare tota area genita a toto arcu AfF, æquatur toti areæ genitæ a recta QN; & abeunte REN in MBL, tota sphæræ superficies totius cylindri superficiei æqualis est, demtis basibus.

COR.

COR. V. Superficies sphæræ æqualis est producto ex circumferentia circuli maximi in axem, sive diametrum sphæræ, ac proinde circuli maximi superficie quadruplo major est (cor. 1, prop. 2, cap. 2.)

COR. VI. Superficies tota cylindri circumscripti, inclusis basibus, est ad totam sphæræ superficiem ut 3 ad 2. Nam superficies sphæræ, in hoc casu, basis cylindri quadruplo major est, superficies autem tota cylindri sua basi sexies major est.

PROP. III. *Prismatis soliditatem metiri*. Polygonum quod prismatis basis est, in ipsam prismatis altitudinem ducatur, habebitur soliditas tota prismatis, ut patet ex genesi ipsius solidi, quod producitur motu parallelo basis, ac proinde basis sive polygoni superficies per altitudinem multiplicari debet.

COR. I. Soliditas cubi habetur multiplicando faciem quadratam basis per ipsum quadrati latus. Parallelepipedi soliditas invenitur, si parallelogrammi superficies per altitudinem multiplicetur; habetur autem soliditas cylindri, si basis, circuli nempe superficies, in altitudinem cylindri ducatur.

COR. II. Eadem in solidorum mensura ratiocinatione instituta, quam in metiendis superficiebus adhibuimus, evidens est cubum esse communem solidorum mensuram non secus ac quadratum est mensura superficierum. Itaque pes solidus continet pollices cubicos 1728, nempe tres habet dimensiones quarum singulæ pedi sive 12 pollicibus

æquan-

æquantur, & ita dicendum de alia qualibet menſura.

PROP. IV. *Pyramidis ſoliditatem invenire.* Si ad centrum I cubi GL fiat quadrata pyramis (Fig. 33.) cujus baſis ſit cubi facies quadrata, evidens eſt totam cubi ſoliditatem dividi in ſex hujuſmodi pyramides quadrilateras, æque altas & æqualium baſium, ac proinde æquales. Igitur pyramis quælibet erit ſexta pars cubi; ſed cubi menſura æqualis eſt producto ex baſi in altitudinem, ergo illarum pyramidum quælibet erit æqualis producto ex baſi in ſextam partem altitudinis HP, vel quod idem eſt in tertiam partem altitudinis IP. Ergo hujuſmodi pyramidis ſoliditas æqualis eſt producto ex baſi in tertiam partem altitudinis, ſeu quod idem eſt, æquatur tertiæ parti cubi ejuſdem baſis & ejuſdem altitudinis.

Generatim pyramis quælibet æqualis eſt producto ex baſi in tertiam partem altitudinis, ſive pyramis quælibet eſt tertia pars priſmatis eandem cum ipſa pyramide baſim habentis eandemque altitudinem. Etenim ſit pyramis quælibet, fingaturque cubus cujus altitudo ſit altitudinis pyramidis dupla. Jam ſi ex centro cubi alia exeat pyramis cujus baſis ſit facies quadrata cubi, evidens eſt hanc pyramidem habere eandem cum propoſita pyramide altitudinem ac proinde pyramides illæ ſunt inter ſe ut baſes (Cor. 8, Prop. 1, c. præc.) Sed ſoliditas pyramidis cubi baſi innixæ, æqualis eſt producto ex tertia parte altitudinis in baſim, ergo ob altitudinem eandem in utraque pyramide,

erit

erit soliditas propositæ pyramidis æqualis producto ex tertia parte altitudinis in basim. Id vero facilius repræsentari potest hoc modo. Sit pyramis quæsita P, cujus altitudo a, basis B, pyramis autem basi cubi imposita dicatur p, erit P : p $=$ B : b; sed

$$p = \frac{1}{3} ab, \text{ ergo } P : \frac{1}{3} ab = B : b,$$

ideoque $P = \frac{1}{3} aB$. Porro hæc pyramis ponitur quadrilatera, facile autem divisa intelligitur in pyramides duas triangulares æqualis basis ejusdem altitudinis, ac proinde pyramis quælibet triangularis æquatur tertiæ parti prismatis triangularis, quod eandem habeat basim eandemque altitudinem. Generatim vero cum pyramis quælibet polygona itemque prisma polygonum dividi possint in pyramides triangulares & prismata triangularia ejusdem basis atque ejusdem altitudinis, patet pyramidem quamlibet polygonam esse tertiam partem prismatis polygoni ejusdem basis atque ejusdem altitudinis.

COR. I. Dum cylindrus tanquam prisma infinitilaterum, itidemque conus tanquam pyramis infinitilatera considerari possint, erit conus tertia pars cylindri eandem habentis basim & eandem altitudinem.

COR. II. Cum sphæra haberi possit tanquam composita ex infinitis pyramidulis, quarum vertex communis est in centro sphæræ, bases autem omnes simul sumptæ totam occupant sphæræ superficiem, singulæ illæ pyramides æquales sunt producto ex tertia

par-

parte radii in suas bases, ac proinde tota pyramidum summa æqualis est producto ex omnibus basibus simul sumptis, hoc est, ex superficie sphæræ in tertiam partem radii. Ergo tota sphæræ soliditas habebitur multiplicando tertiam radii partem per circuli maximi superficiem quater sumptam.

COR. III. Cum soliditas cylindri sit productum ex diametro in circulum maximum, soliditas sphæræ æqualis est duabus tertiis partibus cylindri circumscripti.

PROP. V. *Solida duo similia, sunt in ratione triplicata laterum homologorum.* Ex solidorum definitione & ex præcedentibus propositionibus evidens est corporis cujuslibet soliditatem esse semper ut productum ex aliqua superficie in aliquem axem, vel aliquam altitudinem; superficies autem ex duabus dimensionibus componitur, ergo solidum quodlibet est in ratione composita trium dimensionum homologarum, seu ejusdem nominis; sed solida *similia* ea dicuntur, quæ singulas dimensiones homologas habent proportionales; ergo solida similia sunt in ratione composita ex tribus dimensionibus proportionalibus, ac proinde in ratione triplicata uniuscujuslibet dimensionis homologæ.

COR. I. Sphæræ sunt in ratione triplicata diametrorum. Etenim sphærarum soliditates sunt inter se ut circuli maximi superficies in radium ducta (Cor. 2, prop. præc.) Sed circulorum superficies sunt in ratione duplicata semidiametrorum (Cor. 1, prop. 3, Sect. præc.); ergo sphæræ sunt in ratione triplicata semidiametrorum vel diame-

tro-

rem illustrabimus. Per punctum quodlibet in aliquo prismatis latere, traductum intelligatur planum ad latus illud perpendiculare; idem planum alia prismatis latera utpote parallela perpendiculariter quoque secabit, atque sectio erit polygonum, cujus unumquodque latus ad duo parallela prismatis latera erit perpendiculare. Quare superficies uniuscujusque faciei æquabitur producto ex unoquoque sectionis latere in prismatis latus quodlibet, ob laterum omnium æqualitatem, ac proinde prismatis superficies æquatur producto ex omnibus lateribus sectionis, hoc est, ex tota sectionis perimetro in prismatis latus quodlibet. Jam si prisma rectum ponatur, planum lateri perpendiculare coincidit cum basi, ideoque superficies prismatis æqualis est producto ex perimetro basis in altitudinem, ut ante, quod idem valet in superficie cylindri qui potest considerari tanquam prisma infinitilaterum. At si rectus non fuerit cylindrus, planum per cylindri axem vel latus quodlibet perpendiculariter traductum, sectione sua cum cylindro obliquo generabit curvam quæ *ellipsis* vocatur a Geometris, de qua in appendice mox addenda, pauca dicemus. Erit autem cylindri obliqui superficies æqualis producto ex ellipsis circumferentia in latus cylindri. Quod spectat coni obliqui superficiem reduci non posse patet, ut fit in cono recto; cum in cono obliquo æquales non sint lineæ omnes ductæ ex vertice coni in basis circumferentiam. Sed hæc pauca monuisse satis sit; neque enim pertinent ad Geometriæ elementa.

AP-

APPENDIX

De lineis curvis.

I. Lineæ curvæ notionem ita ſimplicem eſſe jam obſervavimus ut explicatione ulla vix clarior effici poſſit; quare prætermiſſa definitione, de lineis curvis generatim, & deinde de parabola & ellipſi pauca exponemus, alia deinde, ubi neceſſitas occurret, demonſtraturi.

In curva qualibet (Fig. 34.) recta AD lineas parallelas, ut MM, æqualiter dividens *diameter* curvæ appellatur; *axis* autem vocatur, ſi eaſdem parallelas ad angulos rectos ſecet. Punctum A in axe *vertex* curvæ dicitur; rectæ autem parallelæ MM dicuntur *ordinatæ*. Pars diametri vel axis inter punctum A, & ordinatam comprehenſa dicitur *abſciſſa*. *Æquatio* curvæ appellatur formula algebraica, quæ relationem inter ſemiordinatas & abſciſſas exprimit. Ita demonſtratum eſt in circulo (Fig. 16.) quadratum rectæ EO, æqualem eſſe producto ex CO in OL. Jam diameter CL dicatur a, ſitque CO $=$ x, & OE $=$ y. Erit OL $=$ a $-$ x, ac proinde $y^2 = ax - x^2$, quæ eſt æquatio ad circulum. Ex his evidens eſt ordinatas & abſciſſas curvæ eſſe quantitates indeterminatas; hæ autem determinantur, ſumptis pro arbitrio alterutrius quantitatis valoribus. Ita ſi in æquatione ad circulum ponatur a $= 10$ fiatque ſucceſſive x $= 0, 1, 2, 3, 4$ &c. invenietur $= 0, 3, 4, \sqrt{21}$ &c. quare ſi ex ſingulis punctis

ctis erigantur perpendiculares hoc modo determinatæ, & per singulas perpendicularium extremitates ducatur curva, hæc ad quæsitam curvam eo accuratius accedet quo plures erunt hujusmodi perpendiculares. Ordinatæ non solum ad axem, sed ad quamlibet diametrum referri possunt, atque etiam initium abscissarum non a solo diametri aut axis vertice computari potest, sed etiam ab aliis punctis. Ita in circulo abscissæ computari possunt vel ab ipso diametri vertice; vel etiam a centro, atque ita prodeunt diversæ ejusdem curvæ æquationes. Verum quocumque modo curva consideretur, probe distingui debent rectæ ad dextram vel ad sinistram jacentes, & ideo dicuntur *positivæ* vel *negativæ*. Has quidem vel illas appellare licet positivas vel negativas; at ubi appellatio determinata est, hæc semper retineri debet; quare semiordinatæ & abscissæ possunt esse vel negativæ vel positivæ; ratio autem facile patet ex iis quæ de quantitatibus positivis & negativis in algebra observavimus

II. Curva quælibet considerari potest vel tamquam curva *polygona*, vel tamquam curva *accurata*. Primus considerandi modus nihil aliud significat, nisi curvam tamquam polygonum infinitilaterum considerari, vel tamquam polygoni inscripti & circumscripti *limitem*. Unum autem probe observandum est in curvarum consideratione; si nempe curvam aliquam velut polygonam quis tractaverit, cavere deinde debet ne eandem curvam velut accuratam habeat, & viceversa, atque etiam eadem regula tenenda est in

duarum curvarum consideratione, ambæ scilicet vel tamquam polygonæ, vel tamquam accuratæ considerari debent; inde enim in rebus physicis orti sunt errores aliqui. Rem exemplo demonstrabimus. In circulo quocumque PQD (Fig. 35.) ducantur chordæ æquales & infinitesimæ PD, DE, producaturque PD in O, donec DO = PD. Præterea agatur per puncta O, E recta OQ, & per punctum D, tangens DN, rectæ OQ occurrens in N, erit OE = 2NE. Etenim triangulum DOE est isoscele, & angulus ODN = angulo NDE, ac proinde NO = NE, & OE = 2NE. Jam ponatur corpus aliquod describere arcum circuli infinitesimum PDE, vi aliqua urgente secundum directionem datam, quæ in loco D corpus a linea recta retrahat. Si consideretur circulus tanquam polygonum, chorda infinitesima PD, erit *spatiolum* tempore præcedenti infinitesimo percursum, eritque DO lineola æqualis & in directum posita spatiolum alterum tempore subsequenti æquali descriptum. Quare si ducatur OE, directioni vis in D agentis parallela, erit hæc lineola OE, vis hujus effectus; vi enim illa corpus ex O transit ad arcum circuli. At si consideretur circulus tanquam accuratus, tangens DN erit lineola vi urgente descripta, ideoque NE vis hujus effectus. Itaque in curva polygona vis effectus repræsentatur per OE, & in curva accurata per NE. Quare in virium mensura retinenda est eadem curvarum consideratio; alioqui effectus duplo major æstimaretur. Verum quia in virium doctrina ipsarum virium effectus dunta-

xat

xat comparamus, res perinde se habet, quæcumque adhibeatur curvarum consideratio, eadem enim prodit effectuum proportio. Hæc autem quæ modo explicavimus referuntur ad virium centralium doctrinam in physica generali demonstrandam.

III. Hæc eadem doctrina ad curvam quamlibet transferri potest; quod ut intelligatur, curvarum descriptionem generatim considerabimus. Curva quælibet plana considerari solet tanquam motu puncti, & perpetua directionis mutatione in plano genita: hic non agimus de curvis quarum puncta singula in eodem non sunt plano, & ideo dicuntur *duplicis curvaturæ*. Itaque evidens est curvam quamlibet ad lineas duas in plano positione data, ordinatas nempe & abscissas referendam esse, ad determinandam nempe alicujus curvæ naturam, oportet puncti mobilis vestigia secundum certam eamdemque legem, ad rectas positione datas referri, ita ut punctum illud secundum eandem omnino legem in quolibet infinitesimo mutatæ directionis angulo moveatur; alioqui non eandem sed plures curvas describeret (contra hyp.). Ex hac curvarum consideratione aliqua sane utilissima colliguntur. 1 Recta curvam quamlibet in unico puncto tangit. Ponamus enim rectam in duobus tribusve punctis contiguis curvam tangere, jam punctum mobile directionem perpetuo non mutaret, quod repugnat .... 2 Si descriptus intelligatur circulus, qui communem cum data curva tangentem in aliquo puncto habeat, ita ut cujuscumque circuli minoris eandem habentis tangentem

arcus aliquis utrinque circa punctum contactus sit intra curvam, cujuscumque vero circuli majoris arcus sit extra curvam, hunc circulum dicimus curvæ *osculatorem* in dato puncto, & ipsius *curvaturam* dicimus *circulari curvaturæ analogam*. Evidens autem est ex geometriæ elementis circuli osculatoris centrum positum esse in concursu duarum perpendicularium ad eandem curvam, ubi puncta duo curvæ ad se invicem in infinitum accedunt; hæc enim est circuli proprietas ut rectæ a centro ad peripheriam ductæ sint ipsi peripheriæ perpendiculares; talis autem recta e centro circuli osculatoris ad curvam ducta vocatur *radius osculator*. . . . 3 Quamvis inter tangentem, & arcum circuli transire possint alii circuli innumeri, attamen inter arcum curvæ & arcum circuli osculatoris nullus alius circulus transire potest; nam (ex def.) quicumque minor circulus, est intra curvam, quicumque major est extra ipsam. Tota circulorum osculatorum utilitas eo reducitur ut omnium curvarum arcus infinitesimus considerari possit tanquam circularis. Etenim arcus infinitesimus circuli osculatoris & arcus infinitesimus curvæ easdem habent proprietates, cum radius sit ad circulum osculatorem & ad arcum infinitesimum curvæ perpendicularis. . . . 4 Hinc definiri potest curvarum in quolibet puncto curvatura; satis enim erit diversas circulorum osculatorum curvaturas inter se comparare: quod quidem facile fieri potest. Etenim evidens est diversorum circulorum curvaturas esse in ratione reciproca radiorum; quod

ut

ut intelligatur, fingamus duas rectas æquales in circulum flecti, unam quidem in totam circumferentiam, alteram vero in semicircumferentiam tantum: manifestum est semicircumferentiam duplo minus curvam esse quam circumferentiam integram; & duplo major est radius circuli ad quem semicircumferentia illa pertinet. Idem simili ratiocinatione patet, si recta eadem in arcum duplo vel triplo majorem incurvetur, & ita deinceps. Comparari ergo inter se possunt diversæ curvarum curvaturæ, atque etiam variæ ejusdem curvæ in diversis punctis curvaturæ; inveniatur nempe in diversis punctis radius circuli osculatoris, hoc est circuli qui curvam in dato puncto tangens, cum ipsa curva ita congruat, ut inter curvam & circulum nullus alius circulus transire possit. Et quidem cum aucto vel diminuto circuli radio, minuatur vel augeatur per gradus illius curvatura, si nullus sit circulus, qui propius quam circulus osculator ad curvam accedat, concludendum est circulum cum ipsa curva in hoc puncto eandem habere curvaturam. Ex his patet finitam esse curvæ alicujus curvaturam, si finitus sit radius osculator: at si radius osculator sit infinitus, curvatura est nulla; tandem si radius usculator = o, curvatura est infinita. Cæterum hæc omnia facilius intelligentur, si revocentur in memoriam quæ de methodo *exhaustionum*, & de *primis* ac *ultimis rationibus* jam explicata sunt. Hæc pauca, quorum usus in physicis institutionibus recurret, ex sublimiori doctrina delibasse satis sit. Superest ut parabo-

læ & ellipſeos naturam breviter exponamus.

IV Si in axe AD (Fig. 34.) ſumantur abſciſſæ quotlibet, & ad ſingula puncta erigantur ſemiordinatæ, ea lege ut abſciſſæ ſemper ſint ut quadrata ordinatarum, curva per ſingulas ordinatarum extremitates tranſiens dicitur *parabola*. Jam abſciſſa dicatur x, & ordinata y; erit ſemper x, ut y^2, ac proinde ratio ordinatarum ad abſciſſas conſtans & eadem manet; quare ſi p ſit quantitas conſtans, erit $\frac{y^2}{x} = p$, ac proinde $y^2 = px$, quæ eſt æquatio ad parabolam; nempe in omni parabola quadratum ordinatæ æquale eſt producto ex abſciſſa in quantitatem conſtantem; hæc autem quantitas conſtans *parameter* dicitur. Si in axe parabolæ abſcindatur recta AF quæ ſit quartæ parametri parti æqualis, punctum F, parabolæ *focus* appellatur.

COR. I. Quoniam creſcente abſciſſa, creſcit etiam quadratum ordinatæ, evidens eſt parabolam non eſſe curvam in ſe redeuntem, ſed puncta illius ſingula ab axe perpetuo recedere in infinitum.

COR. II. Data abſciſſa qualibet ejuſque ordinata, inveniri ſemper poterit parameter, cum ſit tertia proportionalis ad ordinatam & abſciſſam.

COR. III. Si abſciſſa ponatur = o, fit quoque ordinata perpendicularis MM = o, ac proinde puncta M, M, coeunt in A, nempe in axis vertice. Quare ſi per verticem parabolæ ducatur recta ordinatis parallela, hæc erit tangens parabolæ in puncto A.

COR.

COR. IV. Ducta intelligatur secans per punctum N, quæ parabolæ occurrat in alio puncto t, ex quo demittatur perpendicularis tp, ad quam ex puncto N erigetur perpendicularis Nq, axi parallela, sit PT = s, PN = y, Nq vel Pp = f, erit tq, $= \frac{fy}{s}$, ob triangulorum TNP, Nqt similitudinem, ac proinde pt $= y + \frac{fy}{s}$ & Ap $= x + f$. Jam sumatur æquatio ad curvam in puncto t, erit $pt^2 = Ap + p = y^2 + \frac{2fy^2}{s} \times \frac{f^2y^2}{s^2} = px \times pf$, deletisque in hac æquatione terminis æqualibus $y^2 = px$, fiet $\frac{2fy}{s^2} \times \frac{f^2y^2}{s^2} = pf$, & dividendo per f,, erit $\frac{2y^2}{s} \times \frac{fy^2}{s^2} = p$. Jam puncta N, t ad se invicem accedant in infinitum mutuoque coeant, secans abit in tangentem, fitque Nq vel Pp = o; quare f = o & $\frac{fy^2}{s^2} = o$, ac proinde æquatio præcedens abit in hanc $\frac{2y^2}{s} = p$, & $2y^2 = ps$, seu ob $px = y^2$, fiet $2px = ps$, $2x = s = PT$. Igitur in parabola recta PT, quæ *subtangens* dicitur, dupla est abscissæ AP.

COR. V. Recta FN ducta ex foco parabolæ ad extremitatem ordinatæ cujuslibet,

æqualis est abscissæ AP & quartæ parti parametri. Nam cum sit $PF = AP - AF = x - \frac{1}{4}p$, vel $= \frac{1}{4}p - x$, prout ordinata jacet supra vel infra punctum F, erit $PF^2 = \overline{AP - AF}^2 = x^2 - \frac{1}{2}px + \frac{1}{16}p^2$. Præterea $PN^2 = px$, ergo $FN^2 = PF^2 + PN^2 = x^2 + \frac{1}{2}px + \frac{1}{16}p^2$, & $FN = x + \frac{1}{4}p = AP + AF$.

COR. VI. Si per punctum contactus ducatur recta QS axi parallela, angulus GNS æqualis est angulo FNT; nam angulus GNS æquatur angulo FTN; præterea triangulum FTN est isoscele, ob $FN = AP + AF = AT + AF = FT$, ac proinde angulus GNS æqualis est angulo FNT. Hæc est tangentis proprietas, quæ in physicis institutionibus erit utilitatis maximæ.

V. Recta quælibet M x (Fig. 36) ducta ex puncto quolibet parabolæ, & axi AQ parallela diameter parabolæ appellatur. Jam vero agatur ordinata MP ad axem, & ex punctis m, O ducantur parallelæ mp, OQ. Tandem ex puncto m agatur mS axi parallela. Dicatur AP, x; PM, y; Qq, f; AQ, k, erit $Ap = k - f$, & ob triangulorum TPM, mso similitudinem, erit $TP : PM = mS : SO$, hoc est, $2x : y = f : SO = \frac{fy}{2x}$

ideo

ideoque $pm = QS = QO - SO = PM - so = y - \frac{fy}{2x}$. Præterea, ex natura parabolæ $pm^2 : PM^2 = Ap : AP$, ideoque $\left(y - \frac{fy}{2x}\right)^2 : yy = k - f : x$, vel $yy - \frac{fyy}{x} + \frac{ffyy}{4xx} : yy = k - f : x$, ductisque mediis & extremis, erit $xyy - fyy + \frac{ffyy}{4x} = kyy - fyy$; & dividendo per yy, factaque reductione erit $x + \frac{ff}{4x} = k$, vel $\frac{ff}{4x} = k - x$.

Jam vero abscissa ad diametrum MO, dicatur x, & ordinata mO, dicatur y, erit $MO = PQ = AQ - AP - k = x$, ideoque $x = k - x$, ac proinde $\frac{ff}{4x} = x$, vel $ff = 4xx$. Sed ob triangulum mSO rectangulum, erit $mS^2 + SO^2 = mO^2$, hoc est, $ff + \frac{ffyy}{4xx} = y'y'$, & loco ff substituendo illius valorem $4xx'$, itemque loco yy illius valorem px, habebitur reductione facta $4xx + px' = y'y'$ vel $(4x + p)\, x' = y'y'$. Est autem $4x + p$ quantitas ad arbitrium sumpta, seu constans, quæ si dicatur p', erit $p'\, x' = y'y'$. Æquatio altera ad parabolam respectu diametri cujuscumque; quare quadratum ordinatæ ad diametrum, æquale

le est producto ex abscissa in quantitatem constantem quae diametri *parameter* dicitur; & generatim quadrata ordinatarum ad diametrum sunt inter se ut ejusdem diametri abscissae respective.

VI. Si in axe HI (Fig. 36.) sumantur abscissae quotlibet, & ad singula puncta erigantur ordinatae FN, PM ea lege, ut sit semper FM^2 ad PN in ratione HF $\times$ FI ad HP $\times$ PI, curva per singularum ordinatarum extremitates transiens vocatur *Elipsis*, quae in circulum abit, si quadrata ordinatarum sint aequalia producto ex segmentis abscissarum. Jam dicatur axis major HI $=$ a, ducaturque ex puncto axis medio C recta BCD, quae dicitur axis minor, sitque BC $=$ b, HP $=$ x, PM $=$ y, PI $=$ $\overline{a - x}$, erit $\overline{a - x} \times x : y^2 = a^2 : b^2$ & $y^2 = \frac{ab^2 x - b^2 x^2}{a^2}$, quae est aequatio ad ellipsim, in qua si ponatur a $=$ b, fit $y^2 = ax - xx$, aequatio ad circulum. Si abscissae computentur a centro C, fit CP $=$ x, PM $=$ y, fiatque HI $=$ 2a, erit in hoc casu. $aa - xx : y^2 = aa : bb$, & $y^2 = \frac{aahb - bbxx}{a}$. Si ex minoris axis extremitate B, tanquam centro, & intervallo BF $=$ CH, tanquam radio describatur arcus circuli, axi majori occurrens in punctis F, f, puncta illa vocantur ellipseos *foci*, evidens autem est haec puncta a centro ellipseos ae-

qua-

qualiter distare; nam ob BC axi perpendicularem, triangula CBF, CBf sunt æqualia.

COR. I. Cum duo ellipseos axes sint constantes, constans etiam est recta iisdem duobus axibus tertia proportionalis; hæc autem linea *parameter* dicitur. Quia autem duo sunt ellipseos axes, duæ etiam sunt parametri; si nempe axis major sit primus proportionis terminus, tertia proportionalis parameter axis majoris dicitur, & contra. Jam si abscissæ ab axis extremitate computentur, sit axis major a, minor b, parameter p; erit $ap = b^2$. Si autem abscissæ computentur a centro, sit 2a axis major & 2b axis minor, erit $2ap = 4b^2$; his autem valoribus in utraque æquatione ad ellipsim substitutis, æquatio ellipseos in primo casu fit $y^2 = px - \frac{px^2}{a}$; in casu altero habebitur $y^2 = \frac{1}{2}ap - \frac{px^2}{2a}$.

COR. II. Ex ellipseos æquatione evidens est eam curvam in se redeuntem & undique terminatam esse; crescentibus enim abscissis a centro computatis decrescunt ordinatæ, ac tandem omnino evanescunt, si abscissa semiaxi æqualis sumatur. Manifestum est mutua axium in centro C intersectione, ellipsim in quatuor partes similes & æquales dividi, cum eadem sit ad quamlibet partem curvæ æquatio omnesque proprietates perinde se habeant. Quia vero ordinata perpendiculari Nn perpetuo decrescente, puncta

puncta N, n coeunt in H, patet tangentem in H esse axi perpendicularem.

COR. III. Distantia focorum a centro facile invenitur; nam cum sit $BF = HC$, erit $FC^2 = HC^2 - BC^2 = \overline{HC - BC} \times \overline{HC + BC}$. Quare distantia foci a centro est media proportionalis inter semiaxium summam illorumque differentiam. Praeterea ob triangulum CBF rectangulum, erit $BC^2 = HC^2 - FC^2$, ac proinde $HC - FC : BC = BC : HC + FC$, seu $HF : BC = BC : FI$, nempe semiaxis minor est medius proportionalis inter foci unius distantias ab utroque axis majoris vertice.

COR. IV. Ex ellipseos constructione summa rectarum BF Bf aequalis est axi majori; at ponamus eandem manere summam in quolibet puncto, sitque $RF + Rf = HI$. Dicatur $HC = a$, $BC = b$, ordinata $RS = y$, $CS = x$, $fC = c$; erit $IS = a - x$, $HS = a + x$, $fS = c - x$, $FS = a + x$, HF vel $If = a - c$, Hf vel $IF = a + c$. Jam vero cum sit (per hypoth.) $FR + fR = 2a$, si differentia inter FR & fR dicatur $2z$, erit $fR = a - z$, & $FR = a + z$. Jam ob triangula FRS, fRS, rectangula, erit $fS^2 + SR^2 = fR^2$, hoc est $cc - 2cx + x^2 + y^2 = a^2 - 2az + z^2$. Praeterea $FS^2 + SR^2 = FR^2$, hoc est $c^2 + 2cx + xx + y^2 = a^2 + 2az + zz$; habentur ergo aequationes duae, quarum prima si a secunda subtrahatur, fiet $4cx = 4az$, & $z = \frac{cx}{a}$;

quo

quo valore substituto in prima æquatione loco z, ideoque & $\frac{c^2 x^2}{a^2}$, loco z^2, erit $c^2 - 2cx + xx + yy = aa - \frac{2acx}{a} + \frac{c^2 x^2}{a^2}$, factaque, ut moris est, reductione habebitur $a^2 c^2 + a^2 x^2 + a^2 y^2 = a^4 + c^2 x^2$, & $a^2 y^2 = a^4 - a^2 c^2 - a^2 x^2 + c^2 x^2$, factaque divisione per $a^2 - c^2$, habetur $\frac{a^2 y^2}{a^2 - c^2} = a^2 - x^2$; loco b^2 substituatur $a^2 - c^2$, fiet $\frac{a^2 y^2}{b^2} = a^2 - x^2$, & tandem $= \frac{a^2 b - b^2 a^2}{a^2}$; quæ est æquatio ad ellipsim ante inventa. Hæc ergo est ellipseos proprietas, ut ductis ex utroque foco rectis ad punctum perimetri quodlibet concurrentibus, rectarum illarum summa sit axi majori semper æqualis. Hanc eandem proprietatem ex æquatione ellipseos derivari facile est; verum ex proprietate ipsa æquationem elicere placuit ut exemplum esset tyronibus, qua ratione ad æquationem curvæ ex data aliqua proprietate pervenire liceat. Hinc evidens est datis duobus ellipseos axibus, ellipsim facili manu describi posse; sumptis nempe in axe majori duobus punctis tanquam focis, his affixum retineatur filum, atque per fili longitudinem ita promoveatur acus aliqua ut filum perpe-

petuo tensum maneat, acus motu suo ellipsis peripheriam percurret, ut patet ex perpetua partium fili & axis æqualitate.

COR. V. Si ex puncto R in ellipseos perimetro ad utrumque focum f, F ducantur rectæ FR, fR, & in linea producta FR, sumatur RT = Rf, ducaturque Tf, ad quam per punctum medium E & per punctum R agatur ER, hæc erit tangens in R. Etenim ponamus rectam ER, ellipsi occurrere in alio puncto r. Ex hoc puncto, in recta RE, agantur lineæ rT, rf, rE. Quoniam (per constr.) TR = Rf & fE = ET, erit RE perpendicularis ad f T, ac proinde singula puncta rectæ ERr æqualiter distant a punctis f, T, ideoque rf = rT. Sed Fr + rT major est quam FT, ergo etiam Fr + rf major est quam FT, ideoque etiam major quam HI; cum (per constr.) sit ET = HI; quare punctum r non pertinet ad ellipsim; ergo recta RE tangit ellipsim in unico puncto R. Hæc est utilissima in physicis institutionibus tangentis proprietas, quam quidem ex ellipseos æquatione, non secus ac in parabola facimus, eruere licebat; sed diversas veritatis inveniendæ vias tyronibus demonstrare maxime convenit.

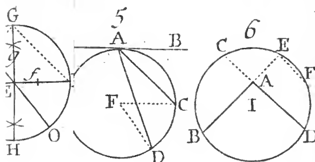
SCHOL. *Sectiones conicæ* appellantur parabola & ellipsis, quibus etiam annumerari debet *hyperbola*, de qua nullum verbum fecimus, utpote nullius fere usus in nostris physicis institutionibus futura. Denominationis ratio facile patebit si tres illas curvas in coni sectione consideremus.

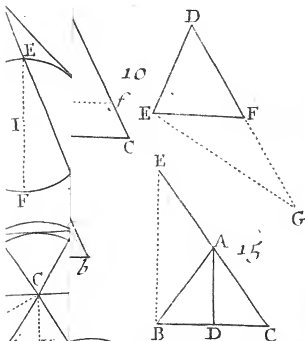
Sit ABC conus (Fig. 37, 38.) circula-

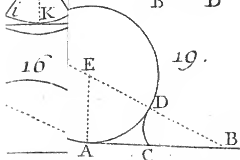
lari basi insistens, & secetur plano quolibet i EM. Ponatur sectio alia KiL parallela basi & occurrens priori sectioni in Hi, intelligaturque sectio tertia priores duas in EH, KL perpendiculariter bisecans atque etiam conum in triangulo ABG. Jam producto EH donec ipsi AK occurrat in D, ductisque EF ac DG rectæ KL parallelis & occurrentibus sectioni triangulari in F, G. Dicatur EF = a, DG = b, ED = c, EH = x; & Hi = y; ob triangulorum EHL, EDG similitudinem, erit ED (c) : DG (b) = EH (x) : HL = $\frac{bx}{b}$. Simili modo ob triangulorum DEF, DHK similitudinem erit DE (c): EF (a) = DH (c − x)(Fig. 37.) vel (c + x) (Fig. 38.): HK = $\frac{ac + ax}{c}$. Tandem cum sectio KiL parallela basi sit circulus, ut patet ex genesi ipsius coni, erit $\overline{HK} \times HL = \overline{Hi}^2$, hoc est, $\frac{abx}{c} - \frac{abxx}{ac} = y^2$. At si ponatur sectionem ita se habere, ut ED non occurrat lateri AK, sed sit ipsi parallela, tunc erit HK = EF = a, ideoque HK $\times$ $\overline{HL}$ = Hi^2, hoc est, $\frac{abx}{c} = y^2$. Probe notanda est curva-

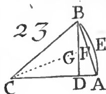
varum illarum genesis. Sectio conica est ellipsis, si planum secans sectione triangulari perpendiculares duobus coni lateribus occurrat. At sectio conica dicitur *hyperbola*, si planum secans neque sit coni lateribus parallelum, neque duo secet coni latera, sed in hoc casu sectio ita se habet ut planum secans productum; cono ad verticem opposito occurrat in D (Fig, 38.), alteraque sectione generet curvam, quæ *hyperbola opposita* vocatur. Igitur in æquatione ad hyperbolam, punctum D sumitur in hyperbola opposita, & productum ex segmentis abscissarum est DH $\times$ EH. Quoad tertiam æquationem $\frac{abx}{c} = y^2$, patet eam esse ad parabolam cujus parameter $\frac{ab}{c}$. In hac autem curva planum secans est alterutri lateri coni parallelum. Itaque cum ex coni sectione natæ sint tres illæ curvæ, patet cur illis factum sit *sectionum conicarum* nomen.

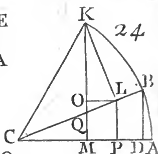
F I N I S.

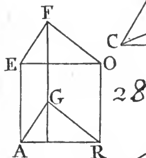

G
g
f
E
H
O
5
A
B
F
C
D
6
C
E
F
A
I
B
D

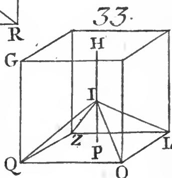

E
I
F
10
f
C
D
E
F
G
E
A
15
B
D
C
C
b
i
K

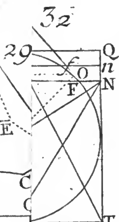

16
19.
E
D
B
A
C


23
B
E
G
F
C
D
A

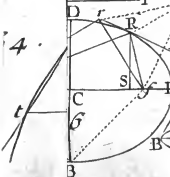

K
24
B
L
O
Q
C
M
P
D
A


F
E
O
G
28
A
R


33.
H
G
I
Z
P
L
Q
O


32
29
Q
f
n
O
N
F
E
C
T

G
D
38
A
F
E
i
K
H
L
M
B
C


D
r
R
T
E
S
f
I
C
t
6
B